

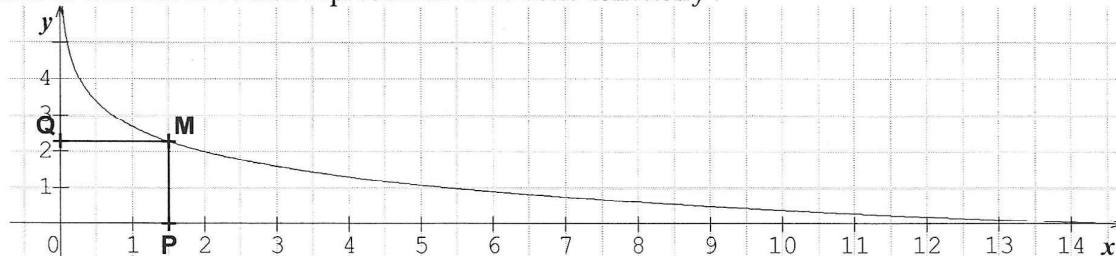
Un exemple d'étude de fonction avec logarithme (3)

Il est nécessaire, dans ce chapitre, de voir des exemples (calculs de limites , dérivée et tableaux de variations) pour bien voir comment la fonction *logarithme* se met en place concrètement dans les exercices. *Les fonctions étudiées sont tirées de sujet de bac.* Tous les calculs ne pourront pas être tous parfaitement détaillés , il faudra être capable de retrouver, par soi-même, certains résultats.

Exemple d'énoncé (d'après sujet bac Pondichery 2016)

Soit f la fonction définie sur $] 0 ; 14 [$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

On donne ci-dessous la courbe représentative de cette fonction f .



L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ? Si oui, donner les coordonnées correspondantes.

On calcule l'aire du rectangle OPMQ = OP × OQ = $x \times f(x)$
 \rightarrow on a $A(x) = x \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right)$

On calcule $A'(x)$ avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$$\hookrightarrow u(x) = x \quad v(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$u'(x) = 1 \quad v'(x) = -\frac{1}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{x}$$

on applique
 $(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u'$

$$\begin{aligned} \text{On obtient } A'(x) &= 1 \times \left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right) + x \times \left(-\frac{1}{x} \right) \\ &= 2 - \ln\frac{x}{2} - 1 = 1 - \ln\frac{x}{2} \end{aligned}$$

On résout $1 - \ln\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \ln\frac{x}{2} = 1 \rightarrow \frac{x}{2} = e \rightarrow x = 2e$
 et on utilise des valeurs test pour le signe de $A'(x)$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$2e$	14
Signes de A'		+	-
Variations de A		↗ $2e$ ↘	

L'aire $A(x)$ est donc maximale en $2e$, et ce maximum est égal à $A(2e) = 2e \left(2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) \right) = 2e(2 - \ln e)$
 $\rightarrow A(2e) = 2e(2 - 1) = 2e$.