

Un exemple d'étude de fonction avec logarithme (2)

Il est nécessaire, dans ce chapitre, de voir des exemples (calculs de limites , dérivée et tableaux de variations) pour bien voir comment la fonction *logarithme* se met en place concrètement dans les exercices. **Les fonctions étudiées sont tirées de sujet de bac.** Tous les calculs ne pourront pas être tous parfaitement détaillés , il faudra être capable de retrouver, par soi-même, certains résultats.

Exemple d'énoncé (d'après sujet bac Amérique du Sud 2017)

1. Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3 \ln x.$$

- a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.
- b. Étudier les variations de φ sur $]0 ; +\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x .

1) a) On a $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3 \times \ln 1$
 $= 1 - 1 + 3 \times 0 = 0 \rightarrow \varphi(1) = 0$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$ (limite du type $0 - 1 - \infty$)
 sans forme indéterminée

b) on calcule $\varphi'(x) = 2x + 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 3}{x}$

$\rightarrow \varphi'$ est toujours positive, pour tout $x > 0$.
 Donc la fonction φ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

on rajoute 1 et $\varphi(1) = 0$
 dans le tableau

On obtient le tableau de variations suivant :

| | | | |
|----------------------------|-----------|-----|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| Signes de $\varphi'(x)$ | | + | |
| Variations de $\varphi(x)$ | $-\infty$ | 0 | $+$ |

On en déduit que, pour $x \in]0 ; 1]$, on a $\varphi(x) \leq 0$
 et pour $x \in [1 ; +\infty[$, on a $\varphi(x) \geq 0$