

## Un exemple d'étude de fonction avec logarithme ( 1 )

Il est nécessaire, dans ce chapitre, de voir des exemples ( calculs de limites , dérivée et tableaux de variations ) pour bien voir comment la fonction *logarithme* se met en place concrètement dans les exercices. *Les fonctions étudiées sont tirées de sujet de bac*. Tous les calculs ne pourront pas être tous parfaitement détaillés , il faudra être capable de retrouver, par soi-même, certains résultats.

**Exemple d'énoncé** ( d'après sujet bac antilles-guyane 2017 )

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

- 1) Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- 2) Déterminer son maximum

1) on calcule  $f'(x)$  avec la formule  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned} \rightarrow u(x) &= \ln x & v(x) &= x \\ u'(x) &= \frac{1}{x} & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{On a } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Pour le signe de  $1 - \ln x$ , on résout  $1 - \ln x = 0$

$$\rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e.$$

Et on utilise par exemple des valeurs test pour trouver les signes !  
Le dénominateur  $x^2$  est bien sûr toujours positif.

On calcule les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad (\text{limite du type } \frac{-\infty}{0})$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (\text{avec les croissances comparées})$$

car c'est une forme indéterminée

On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	$0$	$e$	$+\infty$
Signes de $f'$	$+$	$0$	$-$
Variations de $f$			

2) On a donc un maximum en  $e$ ,  
qui est égal à  $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ .