Comment résoudre une inéquation avec l'inconnue en puissance

Souvent, à la fin d'un exercice sur les suites, lorsque l'on a obtenu la formule explicite de la suite, on peut nous demander de résoudre une inéquation où l'inconnue se trouve en puissance.
Il faut donc savoir parfaitement appliquer la méthode de résolution décrite sur cette fiche !

La formule à connaitre par coeur

Dans la méthode, on doit utiliser une propriété de la fonction *logarithme népérien* qui nous permettra de "*faire descendre la puissance*" :

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

Un exemple tout simple

On veut résoudre l'inéquation : $1{,}9^n > 16\,000$

$\rightarrow \ln(1{,}9^n) > \ln(16\,000)$

$\rightarrow n \times \ln 1{,}9 > \ln 16\,000$

$\rightarrow n > \dfrac{\ln 16\,000}{\ln 1{,}9} \simeq 15{,}08 \quad \rightarrow n \geq 16$

il faut forcément un nombre entier

Un exemple plus compliqué

On a réussi à obtenir la formule explicite d'une suite (U_n) avec $U_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$.
On cherche alors, à partir de quel rang n , la suite (U_n) devient supérieure à 78.

On veut : $U_n > 78$

soit $80 - 60 \times 0{,}75^n > 78$

soit $-60 \times 0{,}75^n > -2$

soit $0{,}75^n \boxed{<} \dfrac{-2}{-60}$

on divise par un négatif donc on inverse le signe

soit $\ln 0{,}75^n < \ln\left(\dfrac{1}{30}\right)$

on a $\dfrac{-2}{-60} = \dfrac{1}{30}$

soit $n \times \ln 0{,}75 < \ln\left(\dfrac{1}{30}\right)$

soit $n \boxed{>} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{30}\right)}{\ln 0{,}75} \approx 11{,}82$

on inverse à nouveau car ln 0,75 est négatif

La condition est donc vérifiée à partir du rang 12.