Comment calculer une limite (avec forme indéterminée FI)
Les croissances comparées

Les croissances comparées

Ces croissances comparées s'utiliseront lorsque nous serons devant un cas de *forme indéterminée* (que l'on notera FI pour simplifier). Le principe général peut se résumer ainsi :

en terme de limites, le logarithme népérien (*ln*) " *perd* " toujours devant l'exponentielle
et le logarithme népérien (*ln*) " *perd* " toujours devant les puissances de x (x , x^2 , x^3...)

En résumé :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$
Ce sont des F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, mais $\ln x$ "perd", en se trouvant au numérateur.	

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$
Ce sont des F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, mais $\ln x$ "perd", en étant cette fois au dénominateur.	

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

c'est une F.I. du type $0 \times \infty$,
mais $\ln x$ "perd" ou plutôt c'est x qui l'emporte.

Application

On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 3}{x^2 + 1}$

On factorise : $\dfrac{\ln x + 3}{x^2+1} = \dfrac{\ln x\left(1 + \frac{3}{\ln x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \boxed{\dfrac{\ln x}{x^2}} \times \dfrac{\left(1 + \boxed{\frac{3}{\ln x}}\right)}{\left(1 + \boxed{\frac{1}{x^2}}\right)}$

$\boxed{\dfrac{\ln x}{x^2}} \to 0$, $\boxed{\dfrac{3}{\ln x}} \to 0$, $\boxed{\dfrac{1}{x^2}} \to 0$

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 3}{x^2 + 1} = 0$