Théorème d'encadrement et de comparaison pour calculer une limite

Ce sont, pour les fonctions, des outils similaires à ceux que l'on a déjà vu avec les suites numériques.

Théorème d'encadrement (ou principe des gendarmes)

Le principe est le suivant : *si une fonction est encadrée par deux fonctions qui tendent vers la même limite, alors la fonction tendra vers cette limite.*

Si on a , autour d'une quantité a (réelle ou infinie), $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

et si on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ alors on aura $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Exemple : avec une fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x} \sin(x)$, on cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Pour tout x, on a : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

Donc, pour x positif ($x \to +\infty$) : $-1 \times \frac{3}{x} \leqslant \frac{3}{x} \times \sin x \leqslant 1 \times \frac{3}{x}$

soit $-\frac{3}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{x}$

Or, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Théorème de comparaison

Le principe est le suivant : *si une fonction est supérieure (resp. inférieure) à une autre fonction qui tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$), alors elle tendra également vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Si on a, autour de a, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors on aura $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Si on a, autour de a, $g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ alors on aura $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

Exemple : avec une fonction f définie par $f(x) = x^2(2 + \cos x)$, on cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Pour tout x, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

On a donc : $\cos x \geqslant -1$

soit $2 + \cos x \geqslant 1$

soit $x^2(2 + \cos x) \geqslant x^2$

Or, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

On en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(2 + \cos x) = +\infty$