Les formules de dérivée des fonctions de Première

J'ai fait le choix, ici, de mettre l'ensemble des fonctions vues en Première, pour avoir une fiche utilisable à n'importe quel moment de l'année (même si, en classe, ces fonctions ne seront pas vues en même temps).
On aura, sur cette fiche, la fonction f écrite à gauche et sa fonction dérivée f ' écrite toujours à droite .

Les puissances (positives) de *x*

Fonction f	*Fonction dérivée f '*
k (nombre réel)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Formule générale

x^n $(n > 0)$	$n\,x^{n-1}$

Application

x^6	$6x^5$

La fonction racine carrée

Cette fonction n'est dérivable que sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, à cause du dénominateur de la dérivée.

$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La fonction inverse et les inverses des puissances de *x*

Toutes ces fonctions ne sont dérivables que sur $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$.

$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$

Formule générale

$\dfrac{1}{x^n}$ $(n > 0)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$

Application

$\dfrac{1}{x^4}$	$-\dfrac{4}{x^5}$

Les fonctions trigonométriques

$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Les propriétés de calcul de la dérivée

Ces propriétés vont nous permettre d'associer les différentes dérivées des fonctions de référence, afin de pouvoir calculer des fonctions dérivées plus complexes.

Addition ou soustraction avec les fonctions dérivées

Les additions et les soustractions sont comme des barrières qui ***isolent*** les parties entre elles.
Quand on a une *addition* ou une *soustraction* de fonctions, on s'occupe donc de chacune d'entre elles, en dérivant ces différentes fonctions *indépendamment* les unes des autres.

Pour deux fonctions u et v : $(u+v)' = u' + v'$
$(u-v)' = u' - v'$

→ avec $f(x) = x^2 + x$,
on a $f'(x) = 2x + 1$.

→ avec $g(x) = x^3 - x^2 - x$,
on a $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Multiplication d'une fonction par un nombre réel

Si on a un *nombre réel* qui multiplie x (ou tout autre fonction dépendant de x) alors on conservera, en dérivant, ce *nombre réel* en le multipliant par la dérivée de la fonction dépendant de x .

Pour une fonction u et un nombre réel α,
on aura : $(\alpha u)' = \alpha \times u'$

→ avec $f(x) = 5x$,
on a $f'(x) = 5 \times 1 = 5$

→ avec $g(x) = 4x^2$,
on a $g'(x) = 4 \times 2x = 8x$

Remarque

Il ne faudra pas confondre le fait de dériver un nombre "*tout seul*" (la dérivée est égale à 0) et un nombre qui est un *facteur* d'une fonction (le nombre est alors conservé).

Si $f(x) = x^2 + 3$, alors on a $f'(x) = 2x + 0 = 2x$

Si $f(x) = 3x^2$, alors on a $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$

Comment calculer la dérivée d'un trinôme, d'un polynôme

Toutes les règles et formules vues dans les fiches précedentes vont nous permettre de déterminer la fonction dérivée de n'importe quel trinôme, et plus généralement de n'importe quel polynôme.

La technique de base

On va s'aider au départ d'une organisation qui doit visuellement nous aider. Cette organisation demande juste d'écrire les dérivées directement en-dessous des fonctions correspondantes.

avec $f(x) = 5\boxed{x^2} + 4\boxed{x} + \boxed{6}$,

on a $f'(x) = 5 \times \boxed{2x} + 4 \times \boxed{1} + \boxed{0}$

soit $f'(x) = 10x + 4$

Des exemples avec cette technique de base

On va continuer à s'aider de cette technique de base pour les deux exemples suivants.

avec $f(x) = -6x^2 - 5x + 4$,

on a $f'(x) = -6 \times 2x - 5 \times 1 + 0$.

soit $f'(x) = -12x - 5$

avec $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 7x - 8$

on a $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 4 \times 2x - 7 \times 1 - 0$

soit $f'(x) = 6x^2 + 8x - 7$

On avance plus rapidement

A partir d'un moment, on peut essayer de répondre directement, la technique étant bien mémorisée.

→ avec $f(x) = 5x + 3$,

on a $f'(x) = 5$

→ avec $f(x) = x^2 + x + 4$,

on a $f'(x) = 2x + 1$

→ avec $f(x) = -4x^2 + 7x - 1$,

on a $f'(x) = -8x + 7$

→ avec $f(x) = 6x^3 + 5x^2 + 4x + 3$,

on a $f'(x) = 18x^2 + 10x + 4$

Calcul de fonction dérivée : quelques exemples en plus

On va appliquer les connaissances des fiches précédentes (règles , formules) pour dériver quelques fonctions assez caractéristiques de l'année de Première. Essayer de retrouver vous-mêmes ces dérivées !

Exemple 1

avec $f(x) = \dfrac{4}{x}$ → soit $f(x) = 4 \times \dfrac{1}{x}$

On a : $f'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-4}{x^2} = -\dfrac{4}{x^2}$

Exemple 2

avec $f(x) = -3\sqrt{x}$

On a : $f'(x) = -3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-3}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

Exemple 3

avec $f(x) = 5x + 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{6}{x^2}$

On écrit $f(x) = 5x + 1 + 2 \times \dfrac{1}{x} + 6 \times \dfrac{1}{x^2}$

On a : $f'(x) = 5 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 6 \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)$

→ $f'(x) = 5 - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{12}{x^3} = \dfrac{5x^3 - 2x - 12}{x^3}$

Exemple 4

avec $f(x) = 3x - 7\sqrt{x}$

On a : $f'(x) = 3 - 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3 - \dfrac{7}{2\sqrt{x}}$

→ $f'(x) = \dfrac{6\sqrt{x} - 7}{2\sqrt{x}}$ on a réduit au même dénominateur

Comment calculer une dérivée avec la formule du produit

Il faudra bien mémoriser cette formule et celle de la dérivée d'un quotient sans les mélanger !!
C'est bien un *plus* (+) dans la formule du *produit*, alors qu'on aura un *moins* (-) pour le *quotient*.

La formule de la dérivée du produit de deux fonctions

Pour deux fonctions u et v, on aura :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

Exemple d'application : avec la fonction définie par $f(x) = 3x^2 \sqrt{x}$

On reconnait ici pour la fonction f l'application de la ***formule de la dérivée d'un produit***.

Je conseille de toujours bien marquer, sur sa feuille, les fonctions u et v, et leur dérivée u' et v'.
Vous n'aurez alors plus qu'à remplacer dans la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

On pose :

$u(x) = 3x^2 \longrightarrow$	$u'(x) = 6x$
$v(x) = \sqrt{x} \longrightarrow$	$v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On applique donc ici la formule du produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

On obtient :

$$f'(x) = \underbrace{6x}_{u'} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{v} + \underbrace{3x^2}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'}$$

soit $f'(x) = 6x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x}}$ on pourrait s'arrêter là !

soit $f'(x) = \dfrac{\boxed{12x^2} + 3x^2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{15}{2}\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$

on a $6x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} = 12x(\sqrt{x})^2 = 12x \times x = 12x^2$

Comment calculer une dérivée avec la formule du quotient

Il faudra bien mémoriser cette formule et celle de la dérivée d'un produit sans les mélanger !!
C'est bien un *moins* (-) dans la formule du *quotient*, alors qu'on aura un *plus* (+) pour le *produit*.

La formule de la dérivée du quotient de deux fonctions

Pour deux fonctions u et v ($v \neq 0$), on a :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

Exemple d'application : avec la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x+3}{2x-4}$

On reconnait ici pour la fonction f l'application de la ***formule de la dérivée d'un quotient***.

Je conseille de toujours bien marquer, sur sa feuille, les fonctions u et v, et leur dérivée u' et v'.
Vous n'aurez alors plus qu'à remplacer dans la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

On pose :

$u(x) = 5x + 3 \rightarrow$	$u'(x) = 5$
$v(x) = 2x - 4 \rightarrow$	$v'(x) = 2$

On applique donc ici la formule du quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

⚠ f est dérivable si $x \neq 2$ à cause de $(2x-4)$ au dénominateur

On obtient :

$$f'(x) = \frac{5 \times (2x-4) - 2(5x+3)}{(2x-4)^2}$$

soit $$f'(x) = \frac{10x - 20 - 10x - 6}{(2x-4)^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{-26}{(2x-4)^2}$$

on ne développe pas le dénominateur

Calcul de dérivée avec produit ou quotient : des exemples en plus

On va appliquer à nouveau chacune des formules. N'oubliez pas de bien *marquer la formule utilisée*, puis u et v et leur dérivée respective u' et v' . Il ne restera plus qu'à remplacer dans la formule !!

La formule du produit avec $f(x) = (4x^2 + 3x + 2)(5x + 1)$

On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = 4x^2 + 3x + 2 \rightarrow u'(x) = 8x + 3$

et $v(x) = 5x + 1 \rightarrow v'(x) = 5$

On obtient : $f'(x) = (8x+3)(5x+1) + 5(4x^2+3x+2)$

$\rightarrow f'(x) = 40x^2 + 8x + 15x + 3 + 20x^2 + 15x + 10$

$\rightarrow f'(x) = 60x^2 + 38x + 13$.

***Remarque* :** **on aurait pu développer $f(x)$ au départ , et calculer la dérivée de l'expression développée. On doit alors trouver le même résultat !**

On a $f(x) = (4x^2+3x+2)(5x+1)$

$= 20x^3 + 4x^2 + 15x^2 + 3x + 10x + 2$

$= 20x^3 + 19x^2 + 13x + 2$

$\rightarrow f'(x) = 60x^2 + 18x + 13$.

La formule du quotient avec $g(x) = \dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 2x^2 + 3x + 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

$v(x) = x + 1 \rightarrow v'(x) = 1$

On obtient : $g'(x) = \dfrac{(4x+3)(x+1) - 1(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2}$

soit $g'(x) = \dfrac{4x^2 + 4x + 3x + 3 - 2x^2 - 3x - 3}{(x+1)^2}$

$\rightarrow g'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \dfrac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Comment trouver plus facilement le nombre dérivé

Qui se souvient de la méthode qui permet de déterminer un *nombre dérivé* sera soulagé de constater que l'on peut maintenant obtenir plus facilement et plus rapidement ces nombres dérivés !

Méthode pratique (qui utilisent les résultats sur les fonctions dérivées)

Si on vous demande maintenant de calculer le nombre dérivé $f'(4)$:

- vous commencez par calculer la *fonction dérivée* $f'(x)$
- et vous *remplacez* tout simplement x par 4 dans cette fonction dérivée. On obtient bien $f'(4)$.

→ avec $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

On a $f'(x) = 6x + 5$

Donc on a $f'(4) = 6 \times 4 + 5 = 29$

→ avec $g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$

On a $g'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$

Donc on a $g'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4}} + \frac{4}{4^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Comment obtenir l'équation d'une tangente

Le fait d'obtenir maintenant l'*équation de la tangente en un point d'une courbe* devient un jeu d'enfant. En effet, la partie la plus fastidieuse qui était de trouver le nombre dérivé ne posera plus de souci !!

On rappelle juste l'équation de la tangente en un point d'abscisse a : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

avec $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 1$,
on cherche l'équation de la tangente en 2.

On calcule $f'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

Donc on a $f'(2) = 6 \times 2^2 - 8 \times 2 + 7 = 15$

De plus, on a $f(2) = 2 \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 7 \times 2 - 1 = 13$

La tangente en 2 aura pour équation :

$y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$

→ $y = 15(x - 2) + 13$

→ $y = 15x - 17$ $\boxed{\text{en développant}}$