Les asymptotes obliques

Le mot "*oblique*" est souvent mal appris et compris car il ne ressemble et ne renvoit à rien de connu.
On va ici rappeler qu'une *asymptote* est juste une droite . Et qu'en Terminale, on travaille globalement sur des asymptotes *horizontales* ou *verticales*.
Mais si l'asymptote est une droite "*normale*", ni horizontale ni verticale, alors on dit qu'on a une asymptote *oblique*.

Méthode

Pour montrer qu'une droite d'équation $y = a\,x + b$ est une asymptote *oblique* pour la courbe d'une fonction f, il faut montrer que la limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) de la différence $(f(x) - (a\,x + b))$ tend vers 0.
C'est à dire : $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Exemple 1 : *on peut nous demander, en Terminale, de savoir gérer tout seul ce type d'exemple.*

On considère la fonction définie par $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{9}{x-4}$ qui est définie sur $]-\infty\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$.

On a : $f(x) - (2x+3) = \dfrac{9}{x-4}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{x-4} = 0$

Donc on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x+3)) = 0$

→ la droite $y = 2x+3$ est bien une asymptote oblique.

Exemple 2 : *cet exemple demande un changement d'écriture qui ne sera pas à l'initiative de l'élève.*

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 6}{x-1}$ qui est définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

Etape 1 : déterminons les nombres a, b et c tels que $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x-1}$

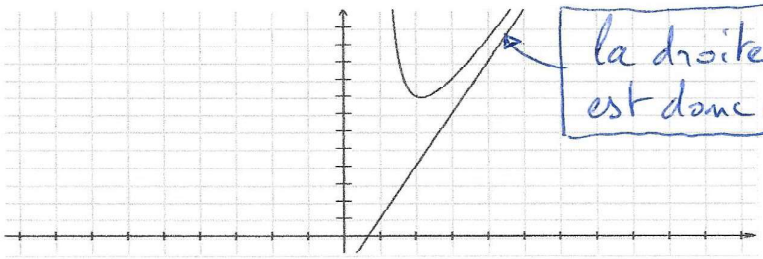
On calcule : $ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \dfrac{ax^2 + (b-a)x + c - b}{x-1}$

et on identifie termes à termes → $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = -5 \\ c - b = 6 \end{cases}$

On trouve alors : $a = 3$ $b = -2$ $c = 4$

On obtient donc : $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$

Etape 2 : on peut alors conclure pour l'asymptote *oblique* comme dans l'exemple 1.



la droite d'équation $y = 3x - 2$ est donc une asymptote oblique