Comment trouver les variations à partir du signe de la dérivée

Obtenir le *tableau de variations* d'une fonction f va devenir un véritable objectif en Première, car cela nous donnera la meilleure "photographie" possible de cette fonction.
Pour cela, la propriété qui établit un lien entre le *tableau de signes de la dérivée* f' et le *tableau de variations de la fonction* f est ***fondamentale*** .

La propriété

Si la dérivée f' est positive (≥ 0) sur un intervalle I, alors la fonction f est CROISSANTE sur I

Si la dérivée f' est négative (≤ 0) sur un intervalle I, alors la fonction f est DECROISSANTE sur I

Il y a même équivalence car on a ausssi les propriétés "dans l'autre sens", c'est à dire si la fonction est croissante alors sa dérivée est positive, et si la fonction est décroissante alors sa dérivée est négative.

Aide mémoire

f' positive (≥ 0) $\Leftrightarrow$ f croissante ($\nearrow$)
f' négative (≤ 0) $\Leftrightarrow$ f décroissante ($\searrow$)

On peut aussi le mémoriser comme cela

f' est $\boxed{+}$ $\Leftrightarrow$ f est $\nearrow$
f' est $\boxed{-}$ $\Leftrightarrow$ f est $\searrow$

Exemple

Si le tableau de signes de la fonction dérivée f' est le suivant :

x	-3		4		7		10
Signes de la dérivée f'		+	0	−	0	+	

Alors le tableau de variations de la fonction f sera :

x	-3		4		7		10
Variations de la fonction f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

En fait, dans la pratique, on "collera" ensemble le tableau de signes de f ' et le tableau de variations de f .

x	-3		4		7		10
Signes de la dérivée f'		+	0	−	0	+	
Variations de la fonction f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Comment trouver les signes d'une fonction affine , d'un trinôme

Pour *étudier une fonction*, c'est à dire pour *connaitre ses variations*, il faudra que l'on cherche le signe de la fonction dérivée.
Il faudra donc concrètement réaliser des *tableaux de signes*.
D'où l'importance de démarrer ce chapitre en ayant revu le travail sur les ***signes d'une fonction affine*** du type $ax + b$ (voir fiches de seconde) et sur les ***signes d'un trinome*** du type $ax^2 + bx + c$ (voir fiches de première). On va juste sur cette fiche faire un résumé très rapide des connaissances à avoir.

Les signes d'une fonction affine

On rappelle qu'il n'y a que deux possibilités de *tableaux de signes* pour une fonction affine.
Pour résumé, on aura soit un tableau du type [- 0 +] soit un tableau du type [+ 0 -].
Le choix entre les deux ne dépend que du signe du coefficient a de l'expression $a x + b$.
Exemple : avec la fonction affine définie par $f (x) = 3 x - 6$

On résout : $3x - 6 = 0$

$\rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signes de $3x - 6$		$-$	0	$+$	

Les signes d'un trinôme

On rappelle qu'il y a six possibilités de tableaux de signes pour un trinôme.
Le choix entre ces six possibilités se fera en fonction de deux critères :

- le signe de a de l'expression $a x^2 + b x + c$ pour savoir comment est orientée la parabole (en $\cup$ ou en $\cap$).
- le nombre de racines du trinôme.

Ce travail sur les trinômes est plus exigeant que celui sur les fonctions affines, mais au final, c'est juste un effort de mémorisation des situations qu'il faudra faire .
Exemple : avec le trinôme défini par $f (x) = x^2 - 4x + 3$

On résout : $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\rightarrow$ on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$

Il y a donc deux racines :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signes de $x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Comment faire l'étude des variations d'une fonction : la méthode

Plan général de l'étude

Pour étudier une fonction f sur un intervalle donné :

- on enlève pour le domaine de définition les éventuelles valeurs interdites.
- on calcule la fonction dérivée $f\,'$.
- **on réalise le tableau de signes de cette fonction dérivée $f\,'$.**
- on en déduit le tableau de variations de la fonction f en utilisant la propriété fondamentale qui nous donne le lien entre le signe de la dérivée f' et le sens de variation de la fonction f.
- on complète le tableau avec les valeurs des images (et, plus tard, avec les limites).

Exemple : *on va étudier sur [- 10 ; 10] la fonction définie par* $f(x) = 3x^2 - 18x + 20$

On cherche les valeurs interdites

Il n'y a aucune valeur interdite pour $3x^2 - 18x + 20$

On calcule la fonction dérivée $f\,'$

On a $f(x) = 3x^2 - 18x + 20$

Donc on a $f'(x) = 6x - 18$

On étudie le signe de la dérivée $f\,'$

On a $f'(x) = 6x - 18$ → c'est une fonction affine.

On résout $6x - 18 = 0$

→ $6x = 18$ → $x = \frac{18}{6} = 3$

On obtient alors le tableau suivant (dans lequel on regroupe les signes de $f\,'$ et les variations de f).

x	-10		3		10
Signes de la dérivée f'		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f	500	↘	-7	↗	140

On calcule les images des nombres du tableau ci-dessus.

$f(-10) = 3 \times (-10)^2 - 18 \times (-10) + 20 = 500$

$f(3) = 3 \times 3^2 - 18 \times 3 + 20 = -7$

$f(10) = 3 \times 10^2 - 18 \times 10 + 20 = 140$

Comment faire l'étude des variations d'une fonction : exemple (1)

On va étudier la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 0{,}5$ sur $[-10 ; 10]$

On cherche les valeurs interdites

Il n'y a aucune valeur interdite pour $-x^3+1{,}5x^2+6x-0{,}5$

On calcule la fonction dérivée f'

On a $f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 0{,}5$

Donc on a $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

On étudie le signe de la dérivée f'

On a $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$ → c'est un trinôme.

On résout $-3x^2 + 3x + 6 = 0$

→ on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 81$

Il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{81}}{2\times(-3)} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{81}}{2\times(-3)} = -1$

On obtient alors le tableau suivant (dans lequel on regroupe les signes de f' et les variations de f).

x	-10		-1		2		10
Signes de la dérivée f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de la fonction f	$1089{,}5$	↘	-4	↗	$9{,}5$	↘	$-790{,}5$

On calcule les images des nombres du tableau ci-dessus.

$f(-10) = -(-10)^3 + 1{,}5 \times (-10)^2 + 6 \times (-10) - 0{,}5 = 1089{,}5$

$f(-1) = -(-1)^3 + 1{,}5 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) - 0{,}5 = -4$

$f(2) = -2^3 + 1{,}5 \times 2^2 + 6 \times 2 - 0{,}5 = 9{,}5$

$f(10) = -10^3 + 1{,}5 \times 10^2 + 6 \times 10 - 0{,}5 = -790{,}5$

Comment faire l'étude des variations d'une fonction : exemple (2)

On va étudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x+5}{-2x+4}$ sur $]-\infty ; +\infty[$

On cherche les valeurs interdites

Le dénominateur $-2x+4$ ne doit pas s'annuler.

On résout : $-2x+4=0 \rightarrow x = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Il y a donc une valeur interdite : 2

La fonction est définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

On calcule la fonction dérivée $f\,'$

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 3x+5 \rightarrow u'(x) = 3$

$v(x) = -2x+4 \rightarrow v'(x) = -2$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{3(-2x+4)-(-2)(3x+5)}{(-2x+4)^2}$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{-6x+12+6x+10}{(-2x+4)^2} = \frac{22}{(-2x+4)^2}$$

à ne pas développer

On étudie le signe de la dérivée $f\,'$

Le numérateur 22 et le dénominateur $(-2x+4)^2$ sont forcément positifs.

Donc la dérivée f' est positive.

On obtient alors le tableau suivant (dans lequel on regroupe les signes de $f\,'$ et les variations de f).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signes de la dérivée f '	+	‖	+
Variations de la fonction f	↗	‖	↗

valeur interdite

Remarque

En classe de Terminale, on pourra compléter totalement ce tableau en calculant des limites.

Comment faire l'étude des variations d'une fonction : exemple (3)

On va étudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+2}$ sur $]-\infty\,;+\infty[$

On cherche les valeurs interdites

Le dénominateur $x+2$ ne doit pas s'annuler.

On résout : $x+2=0 \rightarrow x=-2$

Il y a donc une valeur interdite : -2

La fonction est définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$

On calcule la fonction dérivée f'

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

avec $u(x) = x^2+x+2 \rightarrow u'(x) = 2x+1$

$v(x) = x+2 \rightarrow v'(x) = 1$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - 1\times(x^2+x+2)}{(x+2)^2}$$

soit $f'(x) = \dfrac{2x^2+4x+x+2-x^2-x-2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

à ne pas développer

On étudie le signe de la dérivée f'

Le dénominateur $(x+2)^2$ est positif.

Le numérateur x^2+4x peut s'étudier comme un trinôme,

ou on peut aussi le factoriser : $x^2+4x = x(x+4)$.

On obtient alors le tableau suivant (dans lequel on regroupe les signes de f' et les variations de f).

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
Signes de x		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signes de x + 4		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signes de (x + 2)²		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
Signes de la dérivée f '		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f		↗	|	↘	||	↘	|	↗	

valeur interdite

Remarque

En classe de Terminale, on pourra compléter totalement ce tableau en calculant des limites.

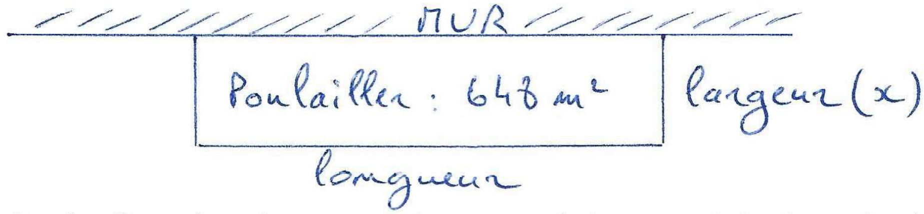
Comment résoudre le problème du poulailler

Devant un *problème* mathématique, les étapes pour sa *résolution* sont toujours les mêmes :

- on fait le choix de *l'inconnue* (très souvent appelé x) , ou des *inconnues* (si elles sont plusieurs).
- on retranscrit la consigne sous la forme d'une *expression algébrique*.
- on répond à la question en résolvant, suivant le cas, une équation ou une inéquation, ou comme dans cette fiche en étudiant une fonction.

Un exemple d'énoncé de problème : le "fameux" problème du poulailler

Un éleveur de poule veut optimiser son poulailler *rectangulaire* afin de mettre la totalité de ses poules, pour un coût *minimal*. Il prévoit pour ce poulailler un espace intérieur égal à 648 m².



Quelles doivent être les dimensions de ce rectangle pour que la longueur de la cloture bordant le poulailler soit minimale (ce qui garantira un coût minimal) ?

En utilisant la formule de l'aire d'un rectangle :

On note x la largeur du poulailler.

On a : Aire du poulailler = largeur × longueur = 648

On obtient : $x \times$ longueur $= 648 \rightarrow$ longueur $= \frac{648}{x}$

La longueur totale de la clôture est donc égale à :

$$f(x) = x + \frac{648}{x} + x = 2x + \frac{648}{x}$$

On étudie donc cette fonction sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$

On obtient : $f'(x) = 2 - \frac{648}{x^2} = \frac{2x^2 - 648}{x^2}$

On obtient le tableau de variations suivant :

on résout $2x^2 - 648 = 0$ sans écrire la racine négative (-18) dans le tableau

x	0		18		$+\infty$
Signes de f'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↘	72	↗	

$f(18)$

Le signe de f' ne dépend que du signe de $2x^2 - 648$, car le dénominateur est toujours positif

Conclusion : Pour une largeur égale à 18 m, on aura une longueur totale de clôture minimale de 72 m.