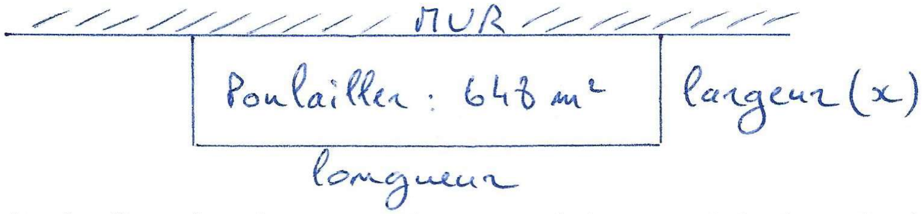
Comment résoudre le problème du poulailler

Devant un *problème* mathématique, les étapes pour sa *résolution* sont toujours les mêmes :

- on fait le choix de *l'inconnue* (très souvent appelé x) , ou des *inconnues* (si elles sont plusieurs).
- on retranscrit la consigne sous la forme d'une *expression algébrique*.
- on répond à la question en résolvant, suivant le cas, une équation ou une inéquation, ou comme dans cette fiche en étudiant une fonction.

Un exemple d'énoncé de problème : le "fameux" problème du poulailler

Un éleveur de poule veut optimiser son poulailler *rectangulaire* afin de mettre la totalité de ses poules, pour un coût *minimal*. Il prévoit pour ce poulailler un espace intérieur égal à 648 m ² .



Quelles doivent être les dimensions de ce rectangle pour que la longueur de la cloture bordant le poulailler soit minimale (ce qui garantira un coût minimal) ?

En utilisant la formule de l'aire d'un rectangle :

On note x la largeur du poulailler.

On a : Aire du poulailler = largeur × longueur = 648

On obtient : $x \times$ longueur = 648 → longueur = $\dfrac{648}{x}$

La longueur totale de la clôture est donc égale à :

$$f(x) = x + \frac{648}{x} + x = 2x + \frac{648}{x}$$

On étudie donc cette fonction sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [

On obtient : $f'(x) = 2 - \dfrac{648}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 648}{x^2}$

On obtient le tableau de variations suivant : on résout $2x^2 - 648 = 0$ sans écrire la racine négative (−18) dans le tableau

x	0		18		+∞
Signes de f '	‖	−	0	+	
Variations de f	‖	↘	72	↗	

72 ← $f(18)$

Le signe de f' ne dépend que du signe de $2x^2 - 648$, car le dénominateur est toujours positif

Conclusion : Pour une largeur égale à 18 m, on aura une longueur totale de clôture minimale de 72 m.