Comment faire l'étude des variations d'une fonction : exemple (3)

On va étudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+2}$ sur $]-\infty\,;+\infty[$

On cherche les valeurs interdites

Le dénominateur $x+2$ ne doit pas s'annuler.

On résout : $x+2=0 \rightarrow x=-2$

Il y a donc une valeur interdite : -2

La fonction est définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$

On calcule la fonction dérivée f'

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

avec $u(x) = x^2+x+2 \rightarrow u'(x) = 2x+1$

$v(x) = x+2 \rightarrow v'(x) = 1$

On obtient :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - 1\times(x^2+x+2)}{(x+2)^2}$$

à ne pas développer

$$\text{soit } f'(x) = \frac{2x^2+4x+x+2-x^2-x-2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

On étudie le signe de la dérivée f'

Le dénominateur $(x+2)^2$ est positif.

Le numérateur x^2+4x peut s'étudier comme un trinôme,

ou on peut aussi le factoriser : $x^2+4x = x(x+4)$.

On obtient alors le tableau suivant (dans lequel on regroupe les signes de f' et les variations de f).

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
Signes de x		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signes de x + 4		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signes de (x + 2) ²		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
Signes de la dérivée f '		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f		↗		↘	||	↘		↗	

valeur interdite

Remarque

En classe de Terminale, on pourra compléter totalement ce tableau en calculant des limites.