Comment faire l'étude des variations d'une fonction : exemple (1)

On va étudier la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 1{,}5\,x^2 + 6\,x - 0{,}5$ sur $[-10 ; 10]$

On cherche les valeurs interdites

Il n'y a aucune valeur interdite pour $-x^3+1{,}5x^2+6x-0{,}5$

On calcule la fonction dérivée f'

On a $f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 + 6x - 0{,}5$

Donc on a $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

On étudie le signe de la dérivée f'

On a $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$ → c'est un trinôme.

On résout $-3x^2 + 3x + 6 = 0$

→ on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 81$

Il y a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{81}}{2\times(-3)} = 2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{81}}{2\times(-3)} = -1$

On obtient alors le tableau suivant (dans lequel on regroupe les signes de f' et les variations de f).

x	-10		-1		2		10
Signes de la dérivée f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de la fonction f	$1089{,}5$	↘	-4	↗	$9{,}5$	↘	$-790{,}5$

On calcule les images des nombres du tableau ci-dessus.

$f(-10) = -(-10)^3 + 1{,}5\times(-10)^2 + 6\times(-10) - 0{,}5 = 1089{,}5$

$f(-1) = -(-1)^3 + 1{,}5\times(-1)^2 + 6\times(-1) - 0{,}5 = -4$

$f(2) = -2^3 + 1{,}5\times 2^2 + 6\times 2 - 0{,}5 = 9{,}5$

$f(10) = -10^3 + 1{,}5\times 10^2 + 6\times 10 - 0{,}5 = -790{,}5$