Un bilan sur les asymptotes avec une étude de fonction

On va étudier les limites d'une fonction très classique (c'est une *fonction homographique*) afin de déterminer ses ***asymptotes***.
Il faut bien savoir que les limites se cherchent "*aux bornes de l'ensemble de définition*", c'est à dire partout où la fonction n'est pas définie (***crochets ouverts*** sur l'ensemble de définition).
En effet, partout où la fonction est définie, on ne calcule pas une limite, mais bien l'image d'un nombre !!

Exemple

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$ qui est définie sur $]-\infty\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$.

Limite en $-\infty$ et limite en $+\infty$

On a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

On factorise : $\dfrac{2x+3}{x-4} = \dfrac{\cancel{x}(2+\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{4}{x})} = \dfrac{2+\boxed{\frac{3}{x}}}{1-\boxed{\frac{4}{x}}}$

on simplifie par x

qui tendent vers 0

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

On a donc une asymptote horizontale d'équation $y=2$.

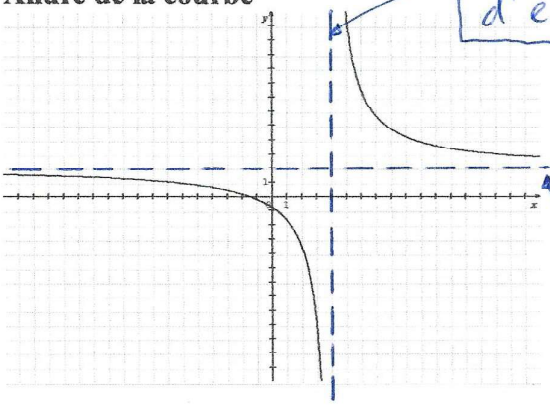
Limite en 4^- et limite en 4^+

On a : $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{2x+3}{x-4} = +\infty$ (limite du type $\frac{11}{0^+}$)

On a : $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{2x+3}{x-4} = -\infty$ (limite du type $\frac{11}{0^-}$)

On a donc une asymptote verticale d'équation $x=4$.

Allure de la courbe



asymptote verticale d'équation $x=4$

asymptote horizontale d'équation $y=2$