Racine carrée et expression conjuguée

Cette *expression conjuguée* nous permettra de faire "disparaitre" des racines carrées dans certaines écritures. L'exemple le plus fréquent concerne des quotients, pour lesquels on veut "éliminer" la (ou les) racine carrée du dénominateur (ce qui permettra d'obtenir une forme plus déchiffrable du nombre).

Pour cela, on sera amené à utiliser une égalité remarquable (dont on rappelle ici le résultat):

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = ((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2) = a - b$$

Exemple 1 → on veut transformer $\frac{8}{3-\sqrt{5}}$.

On a : $\frac{8}{3-\sqrt{5}} = \frac{8\times(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\times(3+\sqrt{5})}$ ← c'est l'expression conjuguée ici !

$= \frac{24+8\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2}$ ← on a développé ← c'est l'égalité remarquable

$= \frac{24+8\sqrt{5}}{9-5} = \frac{24+8\sqrt{5}}{4}$

On a donc : $\frac{8}{3-\sqrt{5}} = \frac{24}{4} + \frac{8\sqrt{5}}{4} = 6 + 2\sqrt{5}$

c'est plus simple, non ?

Exemple 2 → on veut transformer $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}$

On a : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10}\times(\sqrt{10}-\sqrt{8})}{(\sqrt{10}+\sqrt{8})\times(\sqrt{10}-\sqrt{8})}$ ← c'est l'expression conjuguée ici !

$= \frac{\sqrt{100}-\sqrt{80}}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{8})^2}$ ← on a développé ← c'est l'égalité remarquable

$= \frac{10-\sqrt{80}}{10-8} = \frac{10-\sqrt{80}}{2}$

On a donc : $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} = \frac{10}{2} - \frac{\sqrt{80}}{2} = 5 - 2\sqrt{5}$

car $\frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$