

Propriétés de calculs avec norme et produit scalaire

Nous abordons ici une partie du chapitre pour laquelle les *démonstrations* sont aussi importantes que les résultats eux mêmes. En effet, ces *démonstrations* nous permettent de mettre en place et d'utiliser les différentes *propriétés du produit scalaire*.

Propriété 1 : produit scalaire avec les normes

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, on a alors l'égalité suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &\quad \uparrow \text{ car } \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &\quad \downarrow \text{ car } \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on en déduit : } 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \\ \text{soit } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \end{aligned}$$

Propriété 2 : norme d'une somme

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, on a alors l'égalité suivante :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{On a : } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &\quad \uparrow \text{ car } \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ &\quad \uparrow \text{ car } \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$