Quelques rappels sur les vecteurs

Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Avec les points A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont égales à ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$).

Exemple : avec $A \begin{vmatrix} 3 \\ -4 \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \end{vmatrix}$

On aura $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 1-3 \\ 6-(-4) \end{vmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} -2 \\ 10 \end{vmatrix}$

La longueur AB d'un vecteur

Avec les points A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B), on aura AB = $\sqrt{(xB-xA)^2+(yB-yA)^2}$

Exemple : avec $A \begin{vmatrix} 3 \\ -4 \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} 1 \\ 6 \end{vmatrix}$

On aura $AB = \sqrt{(1-3)^2+(6-(-4))^2} = \sqrt{(-2)^2+10^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}$

Opposé d'un vecteur

L'*opposé du vecteur* $\overrightarrow{RM}$ correspond au vecteur (- $\overrightarrow{RM}$) et il est égal au vecteur $\overrightarrow{MR}$.

De même, l'*opposé du vecteur* 2 $\overrightarrow{AK}$ correspond au vecteur (– 2 $\overrightarrow{AK}$) et il est égal au vecteur 2 $\overrightarrow{KA}$.

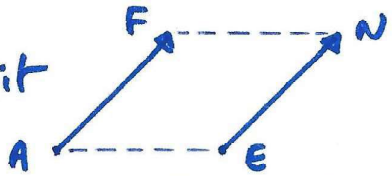
→ en pratique, on remplacera les soustractions par des additions, en prenant l'opposé des vecteurs concernés ("en intervertissant les deux lettres").

Par exemple, on écrira $\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{EF}$ - 3 $\overrightarrow{MO}$ = $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{FE}$ + 3 $\overrightarrow{OM}$

Egalité de deux vecteurs et parallélogramme

Si on a $\overrightarrow{AF}$ = $\overrightarrow{EN}$ alors le quadrilatère AFNE est un *parallélogramme* (attention à l'ordre des lettres).

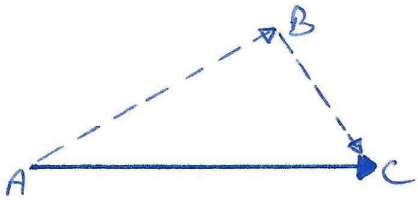
On a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EN}$, soit



, et donc AFNE est un parallélogramme.

La propriété de Chasles

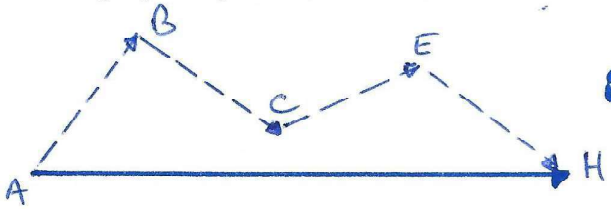
Cette propriété peut être vue comme la disparition (ou l'apparition) d'un point dans les additions.



On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ disparition de B

On a aussi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ apparition de B

Et cette propriété peut aussi être vue comme le *chemin détourné* qui amène d'un point à un autre !!



On a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EH}$

Comment construire un point défini par des vecteurs

On va résumer, sur cette fiche, quelques situations importantes à bien maitriser.

Cas 1 : construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{AB}$

On partage $\overrightarrow{AB}$ en *quatre* parties égales et on prend *trois* de ces parties (en partant du point A).

Cas 2 : construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\ \overrightarrow{AB}$

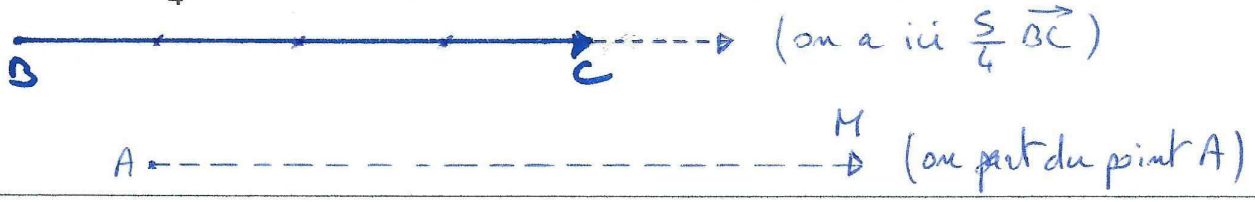
On partage $\overrightarrow{AB}$ en *deux* parties égales et on prend *cinq* de ces parties (en partant du point A).
Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sera donc plus grand que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas 3 : construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -2\ \overrightarrow{AB}$

On partira bien du point A , mais dans le *sens opposé* par rapport à $\overrightarrow{AB}$ (le coefficient est *négatif*).

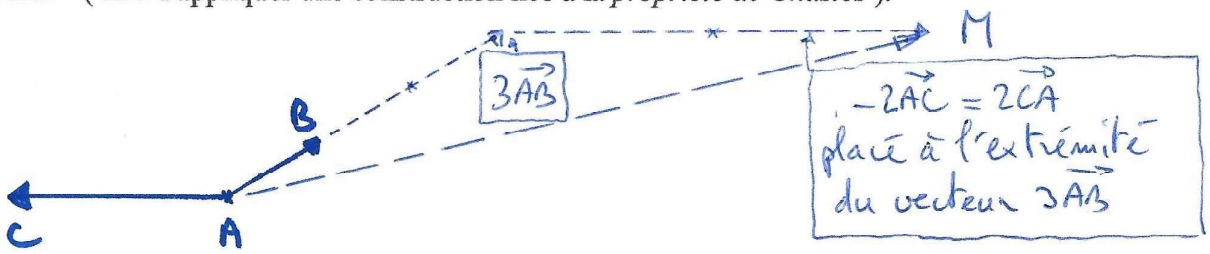
Cas 4 : construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}\ \overrightarrow{BC}$

On construit $\frac{5}{4}\ \overrightarrow{BC}$ mais le *point d'application* devra être, pour cet exemple, le point A .



Cas 5 : construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\ \overrightarrow{AB} - 2\ \overrightarrow{AC}$

On construit 3 $\overrightarrow{AB}$, et on construit 2 $\overrightarrow{CA}$ (qui correspond à - 2 $\overrightarrow{AC}$) au bout de ce " nouveau vecteur " (afin d'appliquer une construction liée à la *propriété de Chasles*).



Utilisation de la colinéarité (droites parallèles , points alignés)

La méthode pratique pour montrer la colinéarité de deux vecteurs

Pour savoir si les vecteurs (non nuls) $\vec{u}\ (x\,;y)$ et $\vec{v}\ (x\,';y\,')$ sont *colinéaires* :

→ on calcule $x \times y' - x' \times y$.

→ si le résultat est égal à 0 , alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

→ et si le résultat n'est pas égal à 0 , alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Application pour montrer que deux droites sont parallèles

Propriété : on sait que deux droites (RT) et (EN) sont parallèles *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{EN}$ sont colinéaires

Exemple : avec $R\begin{vmatrix}1\\5\end{vmatrix}$ $T\begin{vmatrix}3\\9\end{vmatrix}$ $E\begin{vmatrix}7\\-1\end{vmatrix}$ $N\begin{vmatrix}10\\5\end{vmatrix}$

On calcule $\overrightarrow{RT}\begin{vmatrix}3-1=2\\9-5=4\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{EN}\begin{vmatrix}10-7=3\\5-(-1)=6\end{vmatrix}$

On vérifie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{RT}\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{EN}\begin{vmatrix}3\\6\end{vmatrix}$

→ on calcule $2\times6-4\times3=12-12=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{EN}$ sont colinéaires.

Donc les droites (RT) et (EN) sont parallèles.

Application pour montrer de trois points sont alignés

Propriété : on sait que trois points R, T et M sont alignés *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont colinéaires.

Remarque : on aurait pu travailler avec les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{TM}$ ou avec les vecteurs $\overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{TM}$ (il faut juste que l'un des points se retrouvent dans les deux vecteurs !!)

Exemple : avec $R\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ $T\begin{vmatrix}-4\\-1\end{vmatrix}$ $M\begin{vmatrix}5\\5\end{vmatrix}$

On calcule $\overrightarrow{RT}\begin{vmatrix}-4-(-1)=-3\\-1-1=-2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{RM}\begin{vmatrix}5-(-1)=6\\5-1=4\end{vmatrix}$

On vérifie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{RT}\begin{vmatrix}-3\\-2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{RM}\begin{vmatrix}6\\4\end{vmatrix}$

→ on calcule $-3\times4-(-2)\times6=-12+12=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RM}$ sont colinéaires.

Donc les points R, T et M sont alignés.

Comment retrouver les coordonnées d'un point

Cette fiche va nous servir à revoir *quelques techniques de bases* sur le calcul vectoriel.

Un exemple d"énoncé

On considère les points A (- 2 ; 3) , B (6 ; - 1) et C (4 ; - 5).
Quelles sont les coordonnées du point M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{AM} = 2\ \overrightarrow{AB} - 3\ \overrightarrow{AC}$?

La méthode

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
On en déduit les coordonnées du vecteur correspondant à $2\ \overrightarrow{AB} - 3\ \overrightarrow{AC}$
Ces coordonnées doivent correspondre au vecteur $\overrightarrow{AM}$ (que l'on exprime en fonction de x et de y).On trouve alors les coordonnées du point M en résolvant deux équations (pour l'abscisse et pour l'ordonnée).

On a $A\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}6\\-1\end{vmatrix}$ et $C\begin{vmatrix}4\\-5\end{vmatrix}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}6-(-2)=8\\-1-3=-4\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}4-(-2)=6\\-5-3=-8\end{vmatrix}$

On en déduit les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

→ on obtient : $2\times\begin{vmatrix}8\\4\end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix}6\\-8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2\times8-3\times6\\2\times4-3\times(-8)\end{vmatrix}$

Donc les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{vmatrix}-2\\16\end{vmatrix}$.

Or les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ vont s'écrire $\begin{vmatrix}x-(-2)\\y-3\end{vmatrix}$

Les coordonnées $\begin{vmatrix}x-(-2)\\y-3\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}-2\\16\end{vmatrix}$ doivent correspondre.

Donc on résout les deux équations :

$x-(-2)=-2$ et $y-3=16$
$x+2=-2$ $\quad$ $y=19$
$x=-4$

<u>CONCLUSION</u> :

Les coordonnées du point M sont : $M\begin{vmatrix}-4\\19\end{vmatrix}$

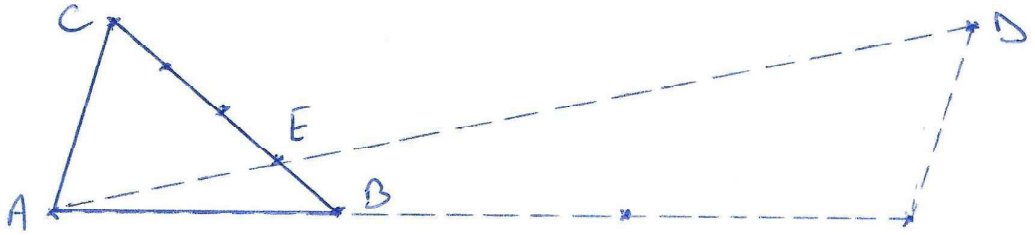
Savoir décomposer un vecteur (Chasles) pour démontrer (1)

Si on a un repère du plan, la méthode la plus simple pour montrer une colinéarité de vecteurs est bien sûr d'utiliser les coordonnées (voir la méthode sur une fiche précédente).
MAIS, si on n'a pas ce repère, on pourra quand même s'intéresser à la colinéarité de deux vecteurs, à condition de *décomposer* ces deux vecteurs à l'aide d'autres vecteurs qui serviront de *base de référence*.

Exemple fondamental

On considère un triangle ABC.

On considère les points D et E vérifiant $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \times \overrightarrow{BC}$.



a) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (on a déjà la décomposition)

On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ → propriété de chasles

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ → $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ → propriété de chasles pour $\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ → on "développe".

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
Que peut-on dire alors des points A, D et E ?

On a $\overrightarrow{AD} = \boxed{3}\,\overrightarrow{AB} + \boxed{1}\,\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AE} = \boxed{\frac{3}{4}}\,\overrightarrow{AB} + \boxed{\frac{1}{4}}\,\overrightarrow{AC}$

On peut chercher le coefficient de proportionnalité

→ on a $3 : \frac{3}{4} = 4$ et $1 : \frac{1}{4} = 4$

On a donc $\overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{AE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont donc colinéaires

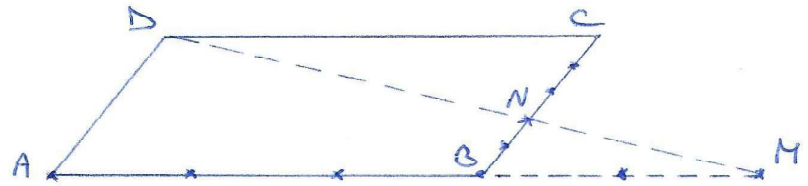
→ les points A, D et E sont donc alignés.

Savoir décomposer un vecteur (Chasles) pour démontrer (2)

Si on a un repère du plan, la méthode la plus simple pour montrer une colinéarité de vecteurs est bien sûr d'utiliser les coordonnées (voir la méthode sur une fiche précédente).
MAIS, si on n'a pas ce repère, on pourra quand même s'intéresser à la colinéarité de deux vecteurs, à condition de *décomposer* ces deux vecteurs à l'aide d'autres vecteurs qui serviront de *base de référence*.

Exemple fondamental

On considère un parallélogramme ABCD.
On place un point M vérifiant $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{3} \times \overrightarrow{AB}$ et un point N vérifiant $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{5} \times \overrightarrow{BC}$.



a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{NM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

On a $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$ → propriété de Chasles
$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ → $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$
$= \overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ → $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$

On a $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM}$ → propriété de Chasles
$= \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ → $\overrightarrow{NB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ → $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$

b) Montrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont colinéaires.
Que peut-on dire alors des points D, N et M ?

On a $\overrightarrow{DN} = \boxed{1}\,\overrightarrow{AB}\ \boxed{-\frac{3}{5}}\,\overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{NM} = \boxed{\frac{2}{3}}\,\overrightarrow{AB}\ \boxed{-\frac{2}{5}}\,\overrightarrow{AD}$

On peut chercher le coefficient de proportionnalité
→ on a $\frac{2}{3} : 1 = \frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3}$

On a donc $\overrightarrow{NM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DN}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont donc colinéaires
→ les points N, M et D sont donc alignés.