Comment calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

Il y a deux modes de génération d'une *suite numérique* : elle peut être définie avec une formule *explicite* ou avec une formule *par récurrence* .

Qu'est ce qu'une formule explicite ?

La *suite numérique* sera définie avec une formule utilisant directement la lettre n .
C'est un peu comme une fonction qui s'exprimerait, non pas avec la lettre x , mais plutôt avec la lettre n.
Mais, attention, cette lettre n ne peut prendre que des valeurs *entières positives* (0 ; 1 ; 2 ; 3 .....) : c'est l'ensemble des *entiers naturels*.

Par exemple, les expressions $U_n = 4\,n + 3$ et $U_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ sont des *formules explicites* qui définissent bien une suite numérique.

Comment calculer les termes de la suite

L'intérêt de la *formule explicite* est de pouvoir calculer directement n'importe quel terme de la suite.
Pour calculer un terme avec une *formule explicite*, il suffit de remplacer n par le rang du terme voulu.
→ pour calculer U_0 , on remplace la lettre n par 0 .
→ pour calculer U_1 , on remplace la lettre n par 1 .
→ pour calculer U_9 , on remplace la lettre n par 9 .....etc.....

Exemple 1 : avec $U_n = 4\,n + 3$

On a $U_0 = 4 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3 \rightarrow U_0 = 3$

$U_1 = 4 \times 1 + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow U_1 = 7$

$U_9 = 4 \times 9 + 3 = 36 + 3 = 39 \rightarrow U_9 = 39$

Exemple 2 : avec $U_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

On a $U_0 = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2} \rightarrow U_0 = \dfrac{1}{2}$

$U_1 = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3} \rightarrow U_1 = \dfrac{2}{3}$

$U_9 = \dfrac{9+1}{9+2} = \dfrac{10}{11} \rightarrow U_9 = \dfrac{10}{11}$

Avec la calculatrice

On peut donc facilement utiliser la calculatrice pour afficher les différents termes d'une suite définie par une formule explicite. Par exemple, avec la TI-83 Premium CE, il faut respecter la procédure suivante :

- inutile de passer en *mode suite* , vous pouvez rester en *mode fonction*.
- après avoir taper sur la touche *f (x)* , vous rentrez la formule de la suite en utilisant la lettre x .
- vous serez bien dans le domaine des suites à partir du moment où avec la touche *déf tab* , vous tapez *DebutTbl = 0* (pour commencer le tableau de valeurs au rang 0) et *ΔTbl = 1* (pour que le rang augmente bien de 1 en 1)
- il ne reste plus qu'à afficher le tableau de valeurs en tapant sur la touche *table*.

Comment calculer les termes d'une suite définie par une formule par récurrence

Il y a deux modes de génération d'une *suite numérique* : elle peut être définie avec une formule *explicite* ou avec une formule *par récurrence* .

Qu'est ce qu'une formule par récurrence ?

La *suite numérique* sera définie avec une formule par récurrence lorsque, dans le cas le plus général, on a une formule reliant le "*terme d'après*" U_{n+1} et son "*terme d'avant*" U_n .

Par exemple, l'expression $U_{n+1} = 4\,U_n + 3$ est une *formule par récurrence* qui définit bien une suite.

Comment calculer les termes de la suite

L'intérêt de la *formule par récurence* est de connaitre le lien entre les termes de la suite.
MAIS, pour le calcul des termes, cela amène une contrainte : pour calculer U_1 , il faut connaitre U_0 . Et pour calculer U_2 , il faut connaitre U_1 . Et donc, on ne peut calculer U_9 que si on connait U_8 .

Exemple 1 : avec $U_{n+1} = 4\,U_n + 3$ et $U_0 = 2$

On a $U_1 = 4 \times U_0 + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11 \rightarrow U_1 = 11$

$U_2 = 4 \times U_1 + 3 = 4 \times 11 + 3 = 47 \rightarrow U_2 = 47$

$U_9 = 4 \times U_8 + 3 \rightarrow$ il faut donc connaitre U_8 .

Exemple 2 : avec $U_{n+2} = 5\,U_{n+1} - 2\,U_n$ et $U_0 = 3$; $U_1 = 4$

On a $U_2 = 5 \times U_1 - 2 \times U_0 = 5 \times 4 - 2 \times 3 = 14$

$U_3 = 5 \times U_2 - 2 \times U_1 = 5 \times 14 - 2 \times 4 = 62$

$U_4 = 5 \times U_3 - 2 \times U_2 = 5 \times 62 - 2 \times 14 = 282$

Avec la calculatrice

Il faut ici obligatoirement utiliser le *mode suite* des calculatrices. Par exemple, pour la suite définie par $U_{n+1} = 4\,U_n + 3$ et $U_0 = 2$, avec la TI-83 Premium CE, il faut respecter la procédure suivante :

- vous commencez en passant en *mode suite* .
- après avoir tapé sur la touche *f (x)* , vous mettez le curseur sur *SUITE(n+1)*.
- vous remplissez alors : *nMin* = 0 (car le premier terme a un rang égal à 0)
  u(n+1) = 4 *u(n)* + 3 (c'est la formule par récurrence de la suite)
  u(0) = 2 (car le premier terme est égal à 2)
- en utilisant la touche *déf tab* , vous tapez *DebutTbl = 0* (pour commencer le tableau de valeurs au rang 0) et *ΔTbl = 1* (pour que le rang augmente bien de 1 en 1)
- il ne reste plus qu'à afficher le tableau de valeurs en tapant sur la touche *table*.

Formule explicite , formule par récurrence
Applications

On va manipuler les indices

Lorsque une suite numérique est définie avec une formule *explicite* donnant le terme U_n en fonction de la lettre n , on peut être amené parfois à calculer le terme U_{n+1} , **en remplaçant n par $n+1$.**

Exemple 1 : avec $U_n = 4n + 3$ (et on sait déjà, d'après une précédente fiche, que $U_9 = 39$).

On obtient : $U_{n+1} = 4(n+1) + 3 = 4n + 4 + 3$

$\rightarrow U_{n+1} = 4n + 7$

Pour calculer U_9 avec U_{n+1} , on remplace n par 8 !

On a : $U_{8+1} = U_9 = 4 \times 8 + 7 = 32 + 7 = 39$

$\rightarrow$ on obtient bien $U_9 = 39$

Exemple 2 : avec $U_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ (et on sait déjà, d'après une précédente fiche, que $U_9 = \dfrac{10}{11}$).

On obtient : $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)+1}{(n+1)+2} = \dfrac{n+2}{n+3}$

Pour calculer U_9 avec U_{n+1} , on remplace n par 8 !

On a : $U_{8+1} = U_9 = \dfrac{8+2}{8+3} = \dfrac{10}{11}$

$\rightarrow$ on obtient bien $U_9 = \dfrac{10}{11}$

Les suites qui mélangent formule par récurrence ET formule explicite

Il faudra être particulièrement vigilant **à ne pas confondre** les "n " qui sont en indice et les " n " qui sont en facteurs. C'est une erreur malheureusement trop souvent observée.

Exemple : avec $U_{n+1} = 5U_n + 4n + 3$ et $U_0 = 2$ ⚠

On a : $U_1 = 5 \times U_0 + 4 \times 0 + 3$

$= 5 \times 2 + 4 \times 0 + 3 = 10 + 0 + 3 = 13$

⚠

$U_2 = 5 \times U_1 + 4 \times 1 + 3$

$= 5 \times 13 + 4 \times 1 + 3 = 65 + 4 + 3 = 72$

Monotonie (sens de variation) d'une suite

Quand on s'intéresse à la *monotonie* d'une suite numérique, c'est que l'on cherche à connaitre son *sens de variation*, c'est à dire savoir si la suite numérique est *croissante* ou *décroissante*.
Attention, ce qui se passe pour les premiers rangs nous importe peu . Ce qui nous intéresse est le comportement de la suite quand la lettre n devient de plus en plus grandes.
Par exemple, ***on ne dira jamais*** *qu'une suite est décroissante pour n allant de 0 à 4 , puis qu'elle est croissante pour n allant de 4 à $+\infty$. On dira juste que la suite est* ***croissante à partir du rang 4****.*

Méthode de base

Le but est de comparer le terme "*d'après*" U_{n+1} par rapport à son terme "*d'avant*" U_n.
Ce terme "*d'après*" est-il plus grand (suite croissante) ou plus petit (suite décroissante) ?

Méthode
On calcule la différence ($U_{n+1} - U_n$) et on étudie le signe de cette différence.
Si on a $U_{n+1} - U_n > 0$ (positif) alors la suite (U_n) sera croissante
Si on a $U_{n+1} - U_n < 0$ (négatif) alors la suite (U_n) sera décroissante

Il est globalement inutile de faire un tableau de signes (comme on a pris l'habitude de faire dans d'autres chapitres) car on cherche bien le signe du résultat "*à partir d'un certain rang*".

Exemple : avec la suite définie par $U_n = 3n^2 - 12n + 1$

Je conseille de calculer séparément U_{n+1} et U_n , puis de calculer la différence $U_{n+1} - U_n$.
Cela peut éviter des calculs trop chargés , trop lourds sur vos copies !

On calcule $U_{n+1} = 3(n+1)^2 - 12(n+1) + 1$
$= 3(n^2+2n+1) - 12(n+1) + 1$
$= 3n^2+6n+3-12n-12+1$
$\rightarrow U_{n+1} = 3n^2 - 6n - 8$

On a donc $U_{n+1} - U_n = 3n^2 - 6n - 8 - (3n^2 - 12n + 1)$
$= 3n^2 - 6n - 8 - 3n^2 + 12n - 1$
$\rightarrow U_{n+1} - U_n = 6n - 9$

De façon évidente, $6n - 9$ est positif dès que $n \geq 2$
Donc on a $U_{n+1} - U_n > 0$ dès que $n \geq 2$
$\rightarrow$ la suite (U_n) est croissante à partir du rang 2 .

Remarque

Dans certain cas (formule explicite ...), on peut conclure sur le *sens de variation d'une suite* à partir du *sens de variation de la fonction correspondante*.

Monotonie (sens de variation) d'une suite : des exemples

On applique la méthode de base avec une suite s'écrivant avec un quotient

Exemple : avec la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{4}{3n+2}$

On calcule $U_{n+1} = \dfrac{4}{3(n+1)+2} = \dfrac{4}{3n+3+2} = \dfrac{4}{3n+5}$

On a donc $U_{n+1} - U_n = \dfrac{4}{3n+5} - \dfrac{4}{3n+2} = \dfrac{4(3n+2) - 4(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$

$\rightarrow U_{n+1} - U_n = \dfrac{12n + 8 - 12n - 20}{(3n+5)(3n+2)} = \dfrac{-12}{(3n+5)(3n+2)}$

On constate que $U_{n+1} - U_n < 0$ pour tout n

$\rightarrow$ la suite (U_n) est donc décroissante.

Une autre méthode (dans le cas d'une suite s'écrivant avec des puissances)

Pour pouvoir bien utiliser les *propriétés de calculs des puissances*, la méthode suivante peut être très utile. MAIS elle ne sera valable que si les termes de la suite (U_n) sont tous *strictement positifs*.

Méthode : on calcule alors le quotient $\dfrac{Un+1}{Un}$.

Si $\dfrac{Un+1}{Un} > 1$ alors la suite (U_n) sera *croissante*, et si $\dfrac{Un+1}{Un} < 1$ alors la suite (U_n) sera *décroissante*.

Exemple : avec $U_n = \dfrac{3^n}{4^{n+1}}$ (qui est bien à termes positifs)

$\hookrightarrow$ on a $U_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{4^{n+1+1}} = \dfrac{3^{n+1}}{4^{n+2}}$

On a donc $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\dfrac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{\dfrac{3^n}{4^{n+1}}} = \dfrac{3^{n+1}}{4^{n+2}} \times \dfrac{4^{n+1}}{3^n} = \dfrac{3^{n+1}}{3^n} \times \dfrac{4^{n+1}}{4^{n+2}} = \dfrac{3}{4}$

On constate que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ (avec $U_n > 0$)

$\rightarrow$ la suite (U_n) est donc décroissante.

Les suites arithmétiques : définition

Qu'est ce que c'est exactement ?

Une suite numérique est *arithmétique* lorsque l'on passe du terme "*d'avant*" au terme "*d'après*" en *ajoutant toujours le même nombre* (qui peut être positif ou négatif). Ce nombre s'appelle alors la *raison*.
Ces suites arithmétiques ont un aspect *prévisible* : c'est pourquoi on va les étudier et vous "embêter" avec.

Exemples : $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{11}$ $\boxed{16}$ $\boxed{21}$ → oui (raison 5)

$U_{n+1} = U_n + 6$ → oui (raison 6)

$U_{n+1} = U_n - 3$ → oui (raison (-3))

$U_{n+1} = U_n^2 + 4$ → NON

Définition avec une formule de récurrence

$$U_{n+1} = U_n + \text{raison}$$

Comment montrer qu'une suite est arithmétique

Méthode

On calcule la différence (U_{n+1} - U_n).

Si cette différence est égale à un nombre, sans la lettre n , alors la suite (U_n) est *arithmétique*.

Ce nombre correspond alors à la *raison* de la suite arithmétique.

Si il y a la lettre n dans cette différence, alors la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

Exemple 1 : avec la suite (U_n) définie par $U_n = 4n - 3$

On calcule $U_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 4 - 3 = 4n + 1$

→ $U_{n+1} - U_n = 4n + 1 - (4n - 3) = 4n + 1 - 4n + 3 = 4$

On obtient donc $U_{n+1} - U_n = \boxed{4}$ nombre sans la lettre n

La suite (U_n) est arithmétique de raison 4.

Exemple 2 : avec la suite (U_n) définie par $U_n = n^2$

On calcule $U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

→ $U_{n+1} - U_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

On obtient donc $U_{n+1} - U_n = \boxed{2n + 1}$ il reste la lettre n

La suite (U_n) n'est pas arithmétique.

La formule pour calculer des termes d'une suite arithmétique

Cette formule est tellement importante. Il faut tout de suite parfaitement la mémoriser, et savoir l'utiliser sans erreur dans les calculs.

La formule fondamentale des suites arithmétiques

Cette formule nous permettra de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique et de déterminer la formule explicite de cette suite.

$$U_n = U_0 + (n-0) \times \text{raison}$$

Contrairement à la majorité des autres professeurs, je fais le choix de bien écrire (n – 0) dans cette formule. Cela peut sembler inutile MAIS cela vous permettra de bien penser à changer le nombre 0 en 1 si vous écrivez la formule en partant de U_1 par exemple.

On aurait du coup : $U_n = U_1 + (n-1) \times \text{raison}$

$U_n = U_2 + (n-2) \times \text{raison}$

Comment utiliser cette formule

On considère une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $U_0 = 10$.

Cela signifie que l'on aurait $U_0 = 10$, $U_1 = 14$, $U_2 = 18$, $U_3 = 22$ .... *etc ...*

et que l'on pourrait écrire $U_{n+1} = U_n + 4$.

→ on calcule U_9 à l'aide de la formule.

On a $U_9 = U_0 + (9-0) \times \text{raison}$

$\rightarrow U_9 = 10 + 9 \times 4 \quad \rightarrow U_9 = 46$

→ on calcule U_{20} (en partant de U_0).

On a $U_{20} = U_0 + (20-0) \times \text{raison}$

$\rightarrow U_{20} = 10 + 20 \times 4 \quad \rightarrow U_{20} = 90$

→ on calcule U_{20} (en partant de U_9) et on vérifie que le résultat est bien égal au précédent calcul.

On a $U_{20} = U_9 + (20-9) \times \text{raison}$ ⚠

$\rightarrow U_{20} = 46 + 11 \times 4 \quad \rightarrow U_{20} = 90$

→ on exprime U_n en fonction de *n* (en partant de U_0). C'est la ***formule explicite*** de la suite.

On a $U_n = U_0 + (n-0) \times \text{raison}$

$\rightarrow U_n = 10 + n \times 4 \quad \rightarrow U_n = 4n + 10$

Remarque : beaucoup d'élèves utilisent cette formule, même si la suite n'est pas arithmétique. C'est bien sûr complètement faux. Attention à ne pas faire cette erreur !

Les suites géométriques : définition

Qu'est ce que c'est exactement ?

Une suite numérique est *géométrique* lorsque l'on passe du terme "*d'avant*" au terme "*d'après*" en *multipliant toujours par le même nombre*. Ce nombre s'appelle alors la *raison*.

Ces suites géométriques ont un aspect *prévisible* : c'est pourquoi on va les étudier et vous "embêter" avec.

Exemples : $\boxed{3}\ \boxed{6}\ \boxed{12}\ \boxed{24}\ \boxed{48}$ → oui (raison 2)

$U_{n+1} = 4 \times U_n$ → oui (raison 4)

$U_{n+1} = \frac{U_n}{3} = \frac{1}{3} \times U_n$ → oui (raison $\frac{1}{3}$)

$U_{n+1} = \frac{6}{U_n} = 6 \times \frac{1}{U_n}$ → NON

Définition avec une formule de récurrence

$$U_{n+1} = \text{raison} \times U_n$$

Comment montrer qu'une suite est géométrique

Méthode

On calcule le quotient $\frac{Un+1}{Un}$.

Si ce quotient est égal à un nombre, sans la lettre n, alors la suite (U_n) est *géométrique*.
Ce nombre correspond alors à la *raison* de la suite géométrique.

Si il y a la lettre n dans ce quotient, alors la suite (U_n) n'est pas géométrique.

Exemple 1 : avec la suite (U_n) définie par $U_n = 5 \times 2^n$ (*qui n'est pas égal à* 10^n).

On calcule $U_{n+1} = 5 \times 2^{n+1}$

→ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = \boxed{2}$ (après simplification)

nombre sans la lettre n

La suite (U_n) est géométrique de raison 2.

Exemple 2 : avec la suite (U_n) définie par $U_n = n^2$

On calcule $U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

→ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \boxed{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$

il reste la lettre n

La suite (U_n) n'est pas géométrique.

La formule pour calculer des termes d'une suite géométrique

Cette formule est tellement importante. Il faut tout de suite parfaitement la mémoriser, et savoir l'utiliser sans erreur dans les calculs.

La formule fondamentale des suites géométriques

Cette formule nous permettra de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique et de déterminer la formule explicite de cette suite.

$$U_n = U_0 \times \text{raison}^{(n-0)}$$

Contrairement à la majorité des autres professeurs, je fais le choix de bien écrire (n – 0) dans cette formule. Cela peut sembler inutile MAIS cela vous permettra de bien penser à changer le nombre 0 en 1 si vous écrivez la formule en partant de U_1 par exemple.

On aurait du coup : $U_n = U_1 \times \text{raison}^{(n-1)}$

$U_n = U_2 \times \text{raison}^{(n-2)}$

Comment utiliser cette formule

On considère une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $U_0 = 2$.

Cela signifie que l'on aurait $U_0 = 2$, $U_1 = 6$, $U_2 = 18$, $U_3 = 54$ *... etc ...*

et que l'on pourrait écrire $U_{n+1} = 3 \times U_n = 3\,U_n$

→ on calcule U_7 à l'aide de la formule.

On a $U_7 = U_0 \times \text{raison}^{(7-0)}$

$\rightarrow U_7 = 2 \times 3^7 = 2 \times 2187 \rightarrow U_7 = 4374$

→ on calcule U_{12} (en partant de U_0).

On a $U_{12} = U_0 \times \text{raison}^{(12-0)}$

$\rightarrow U_{12} = 2 \times 3^{12} = 2 \times 531441 \rightarrow U_{12} = 1\,062\,882$

→ on calcule U_{12} (en partant de U_7) et on vérifie que le résultat est bien égal au précédent calcul.

On a $U_{12} = U_7 \times \text{raison}^{(12-7)}$ ⚠

$\rightarrow U_{12} = 4374 \times 3^5 = 4374 \times 243 \rightarrow U_{12} = 1\,062\,882$

→ on exprime U_n en fonction de *n* (en partant de U_0). C'est la ***formule explicite*** de la suite.

On a $U_n = U_0 \times \text{raison}^{(n-0)}$

$\rightarrow U_n = 2 \times 3^n$ (qui n'est pas égal à 6^n)

Remarque : beaucoup d'élèves utilisent cette formule, même si la suite n'est pas géométrique. C'est bien sûr complètement faux. Attention à ne pas faire cette erreur !

Suite géométrique et pourcentage de hausse ou de baisse

Dans les exercices, dès que l'on parle de la *hausse* d'une valeur numérique (ou de la *baisse*), on pourra exprimer cette valeur à l'aide d'une *suite géométrique* dont la *raison* sera le *coefficient multiplicateur* lié à cette *hausse* (ou à cette *baisse*) .

Exemple avec une hausse

On considère une somme d'argent U_0 = 750 euros, placée à la banque , avec un taux d'intérêt de 2 % (ce qui signifie que, d'une année sur l'autre, la somme d'argent augmente de 2%).
Combien aura t'on sur le compte au bout de 8 ans ?

On calcule le coefficient multiplicateur pour une hausse de 2% $\rightarrow \left(1+\frac{2}{100}\right)=1,02$

On a donc une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme $U_0=750$ (on a $U_{n+1}=1,02\times U_n$)

On applique la formule des suites géométriques

$U_8 = U_0 \times \text{raison}^{(8-0)} = 750\times(1,02)^8 \approx 879$

Au bout de 8 ans, il y aura environ 879 euros sur le compte.

Exemple avec une baisse

On considère un iceberg de l'antarctique de volume U_0 = 4 000 000 m^3, avec une baisse de ce volume (causée par la fonte des glaces) de 1,5 % chaque année.
Quel sera le volume de cet iceberg au bout de 10 ans ?

On calcule le coefficient multiplicateur pour une baisse de 1,5% $\rightarrow \left(1-\frac{1,5}{100}\right)=0,985$

On a donc une suite géométrique de raison 0,985 et de premier terme $U_0=4\,000\,000$ (on a $U_{n+1}=0,985\times U_n$)

On applique la formule des suites géométriques

$U_{10} = U_0 \times \text{raison}^{(10-0)} = 4\,000\,000\times(0,985)^{10} \approx 3\,438\,922$

Le volume de l'iceberg sera environ égal à 3 438 922 m^3.

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

La formule (pour une suite ARITHMETIQUE)

Faire cette somme, c'est bien donner le résultat de ***l'addition*** des termes consécutifs d'une suite.
Ne vous faites pas piéger , pas de résultat décimal possible si les termes sont tous des nombres entiers (on voit trop souvent cette erreur sur des copies où la formule a été mal appliquée).

$$\text{somme} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Contrairement à la majorité des autres professeurs, je fais le choix de donner cette formule sous la forme "écrite en français". En effet, les autres formes (avec des indices et des nombres) ne sont applicables que dans certains cas particuliers et elles ne sont pas aussi généralisables.

Quelques exemples d'utilisation

Exemple 1 : on veut, avec cette formule, calculer la somme $S = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$.

On reconnait les termes d'une suite arithmétique de raison 2.

premier terme — dernier terme

$$\rightarrow S = \frac{(3+13)}{2} \times 6 = \frac{16}{2} \times 6 = 8 \times 6 = 48$$

on peut le vérifier facilement

il y a bien 6 termes

Exemple 2 : on considère une suite arithmétique (U_n) de raison 10 et de premier terme $U_0 = 3$.
On veut calculer la somme $S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6$.

On a : $S = \frac{(U_0 + U_6)}{2} \times \boxed{7}$

attention au nombre de termes, il y a bien 7 ici

On doit calculer $U_6 \rightarrow U_6 = U_0 + (6-0) \times \text{raison}$
$= 3 + 6 \times 10 = 63$

Donc $S = \frac{(3+63)}{2} \times 7 = \frac{66}{2} \times 7 = 33 \times 7 = 231$

Exemple 3 : on considère une suite arithmétique (U_n) de raison 4 et de premier terme $U_2 = 1$.
On veut exprimer, en fonction de *n*, la somme $S = U_2 + U_3 + U_4 + \ldots\ldots + U_n$.

On a : $S = \frac{(U_2 + U_n)}{2} \times \boxed{(n-1)}$

attention au nombre de termes, il y en a bien $(n-1)$ ici.

On doit calculer $U_n \rightarrow U_n = U_2 + (n-2) \times \text{raison}$
$= 1 + (n-2) \times 4 = 4n - 7$

Donc $S = \frac{(1 + 4n - 7)}{2} \times (n-1) = \frac{(4n-6)}{2} \times (n-1) = (2n-3)(n-1)$

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

La formule (pour une suite GEOMETRIQUE)

Faire cette somme, c'est bien donner le résultat de ***l'addition*** des termes consécutifs d'une suite.
Ne vous faites pas piéger , pas de résultat décimal possible si les termes sont tous des nombres entiers (on voit trop souvent cette erreur sur des copies où la formule a été mal appliquée).

$$\text{somme} = (\text{premier terme}) \times \frac{(1 - \text{raison}^{(\text{nombre de termes})})}{(1 - \text{raison})}$$

Contrairement à la majorité des autres professeurs, je fais le choix de donner cette formule sous la forme "écrite en français". En effet, les autres formes (avec des indices et des nombres) ne sont applicables que dans certains cas particuliers et elles ne sont pas aussi généralisables.

Quelques exemples d'utilisation

Exemple 1 : on veut, avec cette formule, calculer la somme $S = 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

On reconnait les termes d'une suite géométrique de raison 2.

il y a bien 5 termes

$$\rightarrow S = \underbrace{4}_{\text{premier terme}} \times \frac{(1-2^{5})}{(1-\underbrace{2}_{\text{raison}})} = 4 \times \frac{(1-32)}{(1-2)} = 124$$

on peut le vérifier facilement

Exemple 2 : on considère une suite géométrique (U_n) de raison 3 et de premier terme $U_0 = 9$.
On veut calculer la somme $S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$.

On a : $S = U_0 \times \frac{(1 - \text{raison}^{6})}{(1 - \text{raison})}$

attention au nombre de termes, il y en a bien 6 ici

Donc $S = 9 \times \frac{(1-3^{6})}{(1-3)} = 9 \times \frac{(1-729)}{(1-3)} = 3\,276$

Exemple 3 : on considère une suite géométrique (U_n) de raison 1,2 et de premier terme $U_1 = 3$.
On veut exprimer, en fonction de n, la somme $S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_n$.

On a : $S = U_1 \times \frac{(1 - \text{raison}^{n})}{(1 - \text{raison})}$

attention au nombre de termes, il y en a bien n ici

Donc $S = 3 \times \frac{(1-1{,}2^{n})}{(1-1{,}2)} = -15 \times (1-1{,}2^{n}) = 15(1{,}2^{n}-1)$

on a $\frac{3}{1-1{,}2} = -15$

Comment étudier les suites arithmético - géométriques

Qu'est ce que c'est exactement ?

Ce sont des suites numériques qui ne sont *ni arithmétique ni géométrique* mais qui s'écrivent avec les éléments caractéristiques de chacune.

Exemples : $U_{n+1} = 3U_n + 4$

$U_{n+1} = 0{,}7U_n - 2$

Etude à l'aide d'une suite auxiliaire

La méthode vue ici va vous servir dans un nombre incroyable d'exercices. Il faut *la suivre avec soin*, en sachant qu'une fois la méthode bien mise en place, seuls les calculs pourront parfois poser des difficultés (n'hésitez pas à jeter un coup d'oeil sur les fiches de terminale).

On donne $U_{n+1} = 0{,}75\ U_n + 20$ (***on va la nommer formule 1***) avec $U_0 = 30$.
On pose alors la suite auxiliaire définie par $V_n = U_n - 80$ (***on va la nommer formule 2***).
Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique.

→ on transforme tout de suite la *formule 2* et on obtient: $U_n = V_n + 80$ (***c'est la formule 3***)

On part de $V_{n+1} \underset{(2)}{=} U_{n+1} - 80$

$\rightarrow V_{n+1} \underset{(1)}{=} 0{,}75\,U_n + 20 - 80$

$\underset{(3)}{=} 0{,}75(V_n + 80) + 20 - 80$

$= 0{,}75V_n + \underbrace{0{,}75 \times 80 + 20 - 80}_{\boxed{0}}$

$\rightarrow V_{n+1} = 0{,}75\,V_n$ (avec $V_0 = U_0 - 80 = -50$)

Conclusion pour la suite auxiliaire (V_n)

(V_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $V_0 = -50$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (V_n)

On a : $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} \rightarrow V_n = -50 \times 0{,}75^n$

On obtient donc la formule explicite pour la suite initiale (U_n)

On a : $U_n = V_n + 80$

soit $U_n = -50 \times 0{,}75^n + 80$

Comment trouver la limite d'une suite

Un point très important à retenir tout de suite : étudier la limite d'une suite, c'est observer son comportement ***lorsque n tend vers*** $+\infty$ **(et uniquement dans ce cas !)**.

Les "grands tableaux indigestes" donnés par les livres ne sont pas , selon moi, à apprendre. En effet, dans une recherche de limite, il y a *4 cas* , appelé les *formes indéterminées*, qui réclament des calculs et/ou des raisonnements, mais sinon , ***tous les autres cas de limites ne sont que des règles simples de calculs***.

Les 4 formes indéterminées qu'il faut connaitre par coeur

Pour ces 4 cas, il y aura un "problème" qu'il faudra apprendre à régler avec une autre fiche.

$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$

Des exemples de limites "faciles", sans formes indéterminées

On va voir dans les exemples ci-dessous que, si on n'est pas dans un cas de forme indéterminée, le bon sens sur les calculs nous permet logiquement de conclure. Faites vous confiance !!

avec $U_n = 3n^2 + n - 1$

On a une limite du type $(+\infty) + (+\infty) - 1$

Donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

avec $V_n = (-n+1) \times (n^2 - 2)$

On a une limite du type $(-\infty) \times (+\infty)$

Donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

avec $W_n = \frac{4}{n^2+3}$

On a une limite du type $\frac{4}{+\infty}$

Donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

Les limites de suite à connaitre par coeur

Les résultats suivants sur les limites sont en lien avec l'aspect *prévisible* des suites *arithmétiques* et des suites *géométriques*. On peut donc ici généraliser des résultats !

Suite arithmétique de raison *positive*

On ajoute toujours le même nombre *positif* (qui est la raison), la limite parait évidente !

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Suite arithmétique de raison *négative*

On ajoute toujours le même nombre *négatif* (qui est la raison), la limite parait évidente !

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

Suite géométrique de raison *supérieure à 1*

On aura par exemple $q = 1{,}02$ ou $q = 1{,}25$ ou $q = 2{,}3$ ou .....
Il faudra faire attention au signe du premier terme (très souvent positif dans les exercices).

Résultat fondamental à apprendre par coeur

Si $q > 1$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

→ avec $U_n = 3 \times (1{,}02)^n$ (raison 1,02 et $U_0 = 3$)

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (1{,}02)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

→ avec $V_n = -4 \times (2{,}3)^n$ (raison 2,3 et $U_0 = -4$)

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (2{,}3)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \boxed{-\infty}$ à cause du (-4)

Suite géométrique de raison *comprise entre – 1 et 1*

On aura par exemple $q = 0{,}95$ ou $q = 0{,}8$ ou $q = -0{,}7$ ou .....

Résultat fondamental à apprendre par coeur

Si $-1 < q < 1$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

On aurait, par exemple :

$$\lim_{n \to +\infty} (0{,}95)^n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} (-0{,}7)^n = 0$$

Comment on lève les formes indéterminées

Conjecture avec la calculatrice

Parfois, même sans savoir le démontrer, on peut, *à minima*, répondre en conjecturant la réponse à l'aide de la calculatrice. On rentre alors la formule (explicite) dans la calculatrice et on regarde les résultats obtenus pour $n = 10$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$ ..... (*N'hésitez pas à faire ces conjectures pour retrouver les limites des 3 exemples démontrés qui vont suivre !*)

Des exemples en factorisant

Quand on a une forme indéterminée, il faut faire un calcul algébrique qui va permettre de remplacer l'écriture donnée par une nouvelle écriture, égale à la première, sauf qu'elle permettra de conclure sur la limite. ***Cette année, on va apprendre à factoriser par le terme prépondérant (donc le plus haut degré).***

Exemple 1 : avec $U_n = \dfrac{3n+4}{2n^2+1}$ → on a une forme indéterminée (FI) du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

On a : $\dfrac{3n+4}{2n^2+1} = \dfrac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\frac{4}{n}}{n\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}$ après simplification

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

On a donc une limite du type $\dfrac{3}{+\infty \times 2}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exemple 2 : avec $V_n = \dfrac{6n^2+4n+1}{2n^2+5}$ → on a une forme indéterminée (FI) du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

On a : $\dfrac{6n^2+4n+1}{2n^2+5} = \dfrac{n^2\left(6+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{6+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$

On a donc une limite du type $\dfrac{6}{2}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 3$

Exemple 3 : avec $W_n = \dfrac{n^2+3}{n+4}$ → on a une forme indéterminée (FI) du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

On a : $\dfrac{n^2+3}{n+4} = \dfrac{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \dfrac{n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{1+\frac{4}{n}}$ après simplification

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$

On a donc une limite du type $\dfrac{+\infty \times 1}{1}$ → $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$