

Les propriétés de calcul du produit scalaire

Nous allons voir sur cette fiche les propriétés essentielles (à apprendre par coeur) du produit scalaire. Et dans les fiches suivantes, nous utiliserons ces propriétés dans les calculs, dans les démonstrations ..etc..

Propriété 1 : on peut intervertir les vecteurs entre eux

On dit alors que le produit scalaire est *symétrique*.

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{RT} = \vec{RT} \cdot \vec{AB}$$

Propriété 2 : avec des vecteurs multipliés par des coefficients

On peut alors regrouper les coefficients entre eux et les multiplier.

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot 3\vec{v} = 3\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$2\vec{u} \cdot (-4\vec{v}) = 2 \times (-4) \vec{u} \cdot \vec{v} = -8 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Propriété 3 : en prenant l'opposé d'un des vecteurs

Le résultat du produit scalaire *change de signe* si on prend l'opposé d'un des vecteurs.

$$\text{On a : } \vec{BA} \cdot \vec{RT} = -\vec{AB} \cdot \vec{RT}$$
$$\vec{AG} \cdot \vec{FH} = -\vec{AG} \cdot \vec{HF}$$

Remarque : le produit scalaire reste donc égal si on prend l'opposé des deux vecteurs.

$$\text{On a donc : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{BA} \cdot \vec{CA}$$

Propriété 4 : savoir "développer" une expression du type $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

La gestion de ce type de calcul va ressembler aux règles classiques du développement algébrique.

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$2\vec{u} \cdot (3\vec{v} - 4\vec{w}) = 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 8\vec{u} \cdot \vec{w}$$

Propriété 5 : bien comprendre l'écriture \vec{u}^2 ou \vec{AB}^2

L'écriture \vec{u}^2 ne correspond pas à une multiplication $\vec{u} \times \vec{u}$ mais bien au produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\text{On a : } \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (\text{on n'écrit pas } u^2)$$
$$\vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2$$

Remarque : cette écriture correspond, au final, à mettre les longueurs des vecteurs au carré.