La fonction racine carrée : ensemble de définition , variations

Ensemble de définition

C'est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $\sqrt{x}$.
Ici , l'ensemble de définition est $[\ 0\ ;+\infty\ [$. On ne peut calculer une *racine carrée* que pour des nombres positifs. Et le résultat obtenu en prenant une *racine carrée* est également toujours positif.

$\sqrt{7}$ existe (on a $\sqrt{7} \approx 2,6$) mais $\sqrt{-8}$ n'existe pas .

Recherche d'un ensemble de définition

Cette recherche nous amènera à réaliser le *tableau de signes* de l'expression sous la racine.
On ne prendra alors que les intervalles pour lesquels il y a un " + " dans ce tableau de signes.

Avec $f(x) = \sqrt{x-3}$

$\sqrt{x-3}$ existe si on a $x-3 \geq 0$, soit $x \geq 3$

$\rightarrow$ on a $D_f = [3\,;+\infty[$.

Avec $g(x) = \sqrt{-4x+8}$ $\rightarrow$ le tableau de signes de $-4x+8$ (fonction *affine*) est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signes de $-4x+8$		$\boxed{+}$	0	$-$	

$\rightarrow$ on a $D_g =]-\infty\,;2]$

Avec $h(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$ $\rightarrow$ le tableau de signes de x^2-6x+8 (fonction *trinôme*) est :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
signes de x^2-6x+8		$\boxed{+}$	0	$-$	0	$\boxed{+}$	

$\rightarrow$ on a $D_h =]-\infty\,;2] \cup [4\,;+\infty[$

Tableau de variations

La fonction *racine carrée* est strictement croissante sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$

x	0	$+\infty$
Variations de $\sqrt{x}$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Conservation de l'ordre avec la racine carrée

Puisque la fonction *racine carrée* est croissante , elle ***CONSERVE*** l'ordre des nombres !!

Exemple : on veut comparer sans calculatrice $\sqrt{\pi}$ et $\sqrt{3}$.

On sait que $\pi > 3$

Donc on a : $\sqrt{\pi} > \sqrt{3}$ (conservation de l'ordre)

Exemple : on veut encadrer $\sqrt{89}$ par deux entiers consécutifs .

On sait que : $81 < 89 < 100$

Donc on a : $\sqrt{81} < \sqrt{89} < \sqrt{100}$, soit $9 < \sqrt{89} < 10$

Les propriétés de calculs de la racine carrée

Rappel des propriétés de bases de la racine carrée

L'idée est qu'avec une multiplication ou une division, on est très libre. On peut, sans souci, *séparer ou regrouper* sous la racine. La même chose est FAUSSE avec une addition ou une soustraction !

Pour tout nombre a et b positifs, on aura :

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ et (notation) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

MAIS interdit d'écrire $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

et $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

On vérifie que $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = 6$ → c'est égal.

Par contre, $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \simeq 3,6$
$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$ → ce n'est pas égal.

Exemples (où l'on peut calculer SANS calculatrice)

On a $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$

On a $\sqrt{32} : \sqrt{8} = \sqrt{32 : 8} = \sqrt{4} = 2$

On a $\sqrt{4900} = \sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$

Application : écrire une expression sous la forme $a\sqrt{2}$

On veut montrer que $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{72}$

(car, bien sûr, $\sqrt{8} + \sqrt{32}$ n'est pas égal à $\sqrt{40}$)

→ on va écrire $\sqrt{8}$, $\sqrt{32}$ et $\sqrt{72}$ sous la forme $a\sqrt{2}$.

On a : $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Donc on a bien $\sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

$= 6\sqrt{2}$ $(= \sqrt{72})$.

Racine carrée et expression conjuguée

Cette *expression conjuguée* nous permettra de faire "disparaitre" des racines carrées dans certaines écritures. L'exemple le plus fréquent concerne des quotients, pour lesquels on veut "éliminer" la (ou les) racine carrée du dénominateur (ce qui permettra d'obtenir une forme plus déchiffrable du nombre).

Pour cela, on sera amené à utiliser une égalité remarquable (dont on rappelle ici le résultat):

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = ((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2) = \boldsymbol{a - b}$$

Exemple 1 → on veut transformer $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$.

On a : $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{8\times(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\times(3+\sqrt{5})}$ ← c'est l'expression conjuguée ici !

$= \dfrac{24+8\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2}$ ← on a développé ; ← c'est l'égalité remarquable

$= \dfrac{24+8\sqrt{5}}{9-5} = \dfrac{24+8\sqrt{5}}{4}$

On a donc : $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{24}{4} + \dfrac{8\sqrt{5}}{4} = 6 + 2\sqrt{5}$

c'est plus simple, non ?

Exemple 2 → on veut transformer $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}$

On a : $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{10}\times(\sqrt{10}-\sqrt{8})}{(\sqrt{10}+\sqrt{8})\times(\sqrt{10}-\sqrt{8})}$ ← c'est l'expression conjuguée ici !

$= \dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{80}}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{8})^2}$ ← on a développé ; ← c'est l'égalité remarquable

$= \dfrac{10-\sqrt{80}}{10-8} = \dfrac{10-\sqrt{80}}{2}$

On a donc : $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} = \dfrac{10}{2} - \dfrac{\sqrt{80}}{2} = 5 - 2\sqrt{5}$

car $\dfrac{\sqrt{80}}{2} = \dfrac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$

La fonction valeur absolue : définition , propriétés

Définition générale

D'un point de vue ***graphique***, sur une droite graduée, la *valeur absolue* d'un nombre x est égale à la *distance* entre le point O (origine) et le point M (d'abscisse x). La valeur absolue de x se note $|x|$.
Conséquence : la valeur absolue d'un nombre est toujours un nombre positif.

Par exemple, on a : $|6| = 6$; $|-3| = 3$; $|3,5| = 3,5$; $|-7,5| = 7,5$

D'un point de vue ***algébrique***, on dira schématiquement que la valeur absolue laisse positif ce qui est déjà positif , et elle rend positif ce qui etait négatif. On retrouve alors souvent la notation suivante :

pour $x \geqslant 0$, on aura $|x| = x$ (rien ne change car x est positif) pour $x \leqslant 0$, on aura $|x| = -x$ (le signe *moins* (-) permet de rendre le résultat positif car x est négatif)

On a : $|\pi - 3| = \pi - 3$ (car $\pi - 3$ est positif)
$|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ (car $2 - \pi$ est négatif)

Valeur absolue et distance entre deux points

La règle suivante est très importante MAIS elle ne sera valable que si on travaille sur une droite graduée.

Sur une droite graduée, on a : distance AB = $|x_B - x_A|$

$|x - 4|$ représente la distance entre un point M d'abscisse x et un point A d'abscisse 4 .
$|x + 6|$ représente la distance entre un point M d'abscisse x et un point B d'abscisse (-6)
car on écrit $|x + 6| = |x - (-6)|$ il faut un $\boxed{-}$ pour la distance !

Domaine de définition

C'est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $|x|$. Ici , l'ensemble de définition est $]-\infty ; +\infty[$. On peut calculer $|x|$ pour n'importe quel nombre.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $|x|$	↘	$\nearrow$	

Conséquence des variations

Sur $]-\infty ; 0]$, la fonction valeur absolue est *décroissante*, donc elle ***INVERSE*** l'ordre des inégalités.

On a : $\pi - 8 < \pi - 4$ (< 0) (négatif)
Donc on aura : $|\pi - 8| \boxed{>} |\pi - 4|$ $\boxed{\text{inversion}}$

Sur $[0 ; +\infty[$, la fonction valeur absolue est *croissante*, donc elle ***CONSERVE*** l'ordre des inégalités.

On a : ($0 <$) $\pi - 2 < \pi - 1$ (positif)
Donc on aura : $|\pi - 2| \boxed{<} |\pi - 1|$ $\boxed{\text{conservation}}$

Comment résoudre une équation avec valeur absolue

Il peut y avoir, pour chaque équation , une méthode *graphique* (avec la notion de *distance*) ou *algébrique*.
Parfois, l'une est plus facile que l'autre, cela dépend des énoncés et de vos compétences en maths.

Exemple 1 : on résout $|x| = -4$

Une valeur absolue n'est jamais négative

$\rightarrow$ il n'y a pas de solution ici , soit $S = \emptyset$

Exemple 2 : on résout $|x| = 9$

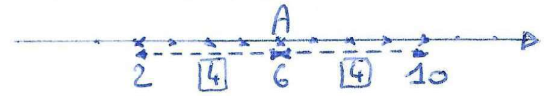
On a $|-9| = |9| = 9 \rightarrow x$ peut prendre la valeur 9 ou -9

On a donc : $S = \{-9 ; 9\}$

Exemple 3 : on résout $|x - 6| = 4$

$\rightarrow$ ***graphiquement*** on a $AM = |x - 6|$ avec A et M d'abscisse 6 et x.

L'équation devient $AM = 4$



On a donc : $S = \{2 ; 10\}$

$\rightarrow$ ***algébriquement*** on a $|-4| = |4| = 4$

On résout alors : $x - 6 = 4$ et $x - 6 = -4$

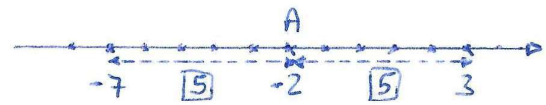
$x = 10$ $\qquad$ $x = -4 + 6 = 2$

On a donc : $S = \{2 ; 10\}$

Exemple 4 : on résout $|x + 2| = 5$

$\rightarrow$ ***graphiquement*** on a $AM = |x - (-2)|$ avec A et M d'abscisse -2 et x.

L'équation devient $AM = 5$



On a donc : $S = \{-7 ; 3\}$

$\rightarrow$ ***algébriquement*** on a $|-5| = |5| = 5$

On résout alors : $x + 2 = 5$ et $x + 2 = -5$

$x = 3$ $\qquad$ $x = -5 - 2 = -7$

On a donc : $S = \{-7 ; 3\}$

Exemple 5 : on résout $|x - 3| = |x + 5|$ (*pour ce type d'équation, la résolution ne sera que* ***graphique***)

On a $AM = |x - 3|$ avec A et M d'abscisse 3 et x.

On a $BM = |x - (-5)|$ avec B et M d'abscisse -5 et x.

L'équation devient : $AM = BM$

Donc M est le milieu de $[AB] \rightarrow S = \{-1\}$

Comment transformer les expressions avec valeur absolue

Lorsque l'on a une fonction s'exprimant avec des valeurs absolues, il faut en général transformer cette fonction , *en l'écrivant sans ses valeurs absolues*.
Pour cela, il faudra réaliser le *tableau de signes* de l'expression (se trouvant à l'intérieur de la valeur absolue) afin de savoir sur quels intervalles elle est positive et sur quels intervalles elle est négative.
En effet, si l'expression est *positive* alors on peut enlever les valeurs absolues *sans rien changer* à l'expression. MAIS si l'expression est *négative* alors on enlèvera les valeurs absolues en *prenant l'opposé* de l'expression.
En général, le plus lisible est de regrouper tout ce travail dans un tableau récapitulatif.

Exemple 1 : avec la fonction définie par $f(x) = |x - 3|$

sur $[3\,;+\infty[$, on a $x \geq 3$, soit $x - 3 \geq 0$ (positif)
Donc on a $|x-3| = x-3$
sur $]-\infty\,;3]$, on a $x \leq 3$, soit $x - 3 \leq 0$ (négatif)
Donc on a $|x-3| = -(x-3) = -x+3$

Exemple 2 : avec la fonction définie par $g(x) = |-4x+8|$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signes de $-4x+8$	$+$	0	$-$
Bilan pour $g(x)$: $\|-4x+8\|$ *va s'écrire ....*	$-4x+8$		$-(-4x+8) = 4x-8$

Exemple 3 : avec la fonction définie par $h(x) = |2x - 6| - |x+4|$

x	$-\infty$ -4	-4 3	3 $+\infty$
signes de $2x-6$	$-$	$-$ 0	$+$
$\|2x-6\|$ *devient ....*	$-(2x-6) = -2x+6$	$-(2x-6) = -2x+6$	$2x-6$
signes de $x+4$	$-$ 0	$+$	$+$
$\|x+4\|$ *devient ....*	$-(x+4) = -x-4$	$x+4$	$x+4$
Bilan pour $h(x)$: $\|2x-6\| - \|x+4\|$ *va s'écrire ....*	$-2x+6-(-x-4)$ $= -2x+6+x+4$ $= -x+10$	$-2x+6-(x+4)$ $= -2x+6-x-4$ $= -3x+2$	$2x-6-(x+4)$ $= 2x-6-x-4$ $= x-10$

Comment résoudre une inéquation avec valeur absolue

Avec une fiche précédente, on a vu comment transformer algébriquement une expression ayant des valeurs absolues. Mais, au final, par rapport aux équations (vues dans une autre fiche), la résolution *algébrique* des inéquations est beaucoup plus technique et elle doit être effectuée avec de l'aide car elle est loin d'être évidente.
Du coup, on va choisir pour cette fiche la résolution graphique qui sera plus visuelle et beaucoup plus facile à mettre en place !

Exemple 1

On résout l'inéquation $|x - 2| \leqslant 5$

On a $AM = |x-2|$ avec A et M d'abscisse 2 et x.

L'inéquation devient : $AM \leq 5$

Dessin :

La distance entre A et M doit donc être inférieure à 5.

→ pour toutes les abscisses entre -3 et 7, on aura $AM \leq 5$.

Donc on obtient : $S = [-3\,;\,7]$

Exemple 2

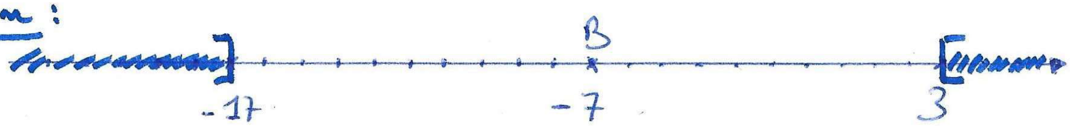
On résout l'inéquation $|x + 7| \geqslant 10$

On a $BM = |x-(-7)|$ avec B et M d'abscisse -7 et x

⚠

L'inéquation devient : $BM \geq 10$

Dessin :



La distance entre B et M doit donc être supérieure à 10.

→ il faut des abscisses inférieures à -17 ou supérieures à 3.

Donc on obtient : $S =]-\infty\,;\,-17] \cup [3\,;\,+\infty[$

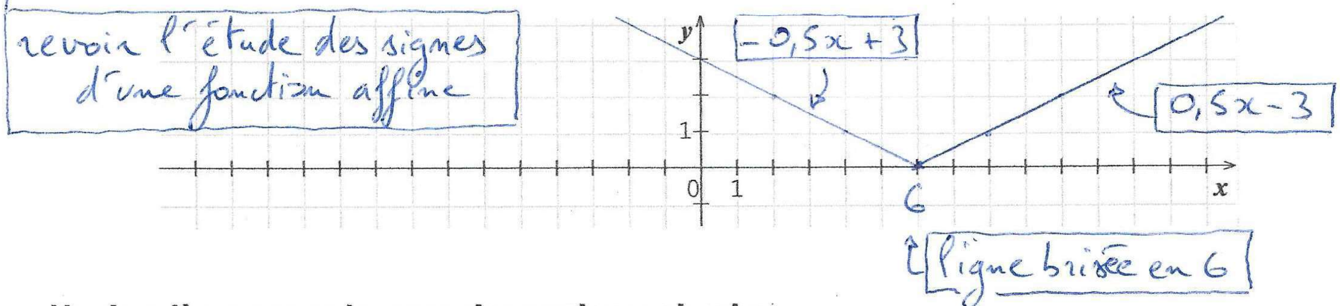
Comment représenter graphiquement une valeur absolue

Pour pouvoir tracer une fonction s'exprimant avec des valeurs absolues, il faut tout d'abord exprimer cette fonction , *en l'écrivant sans ses valeurs absolues*.
Pour cela, il faudra *transformer* la fonction (comme vu sur une fiche précédente)
Ainsi, on obtient des expressions de la fonction *différentes suivant les intervalles*, et on finit en traçant des "portions" de droites (sur les intervalles correspondants).

Un premier exemple, avec seulement une valeur absolue

On considère la fonction définie par $f(x) = |0{,}5x - 3|$

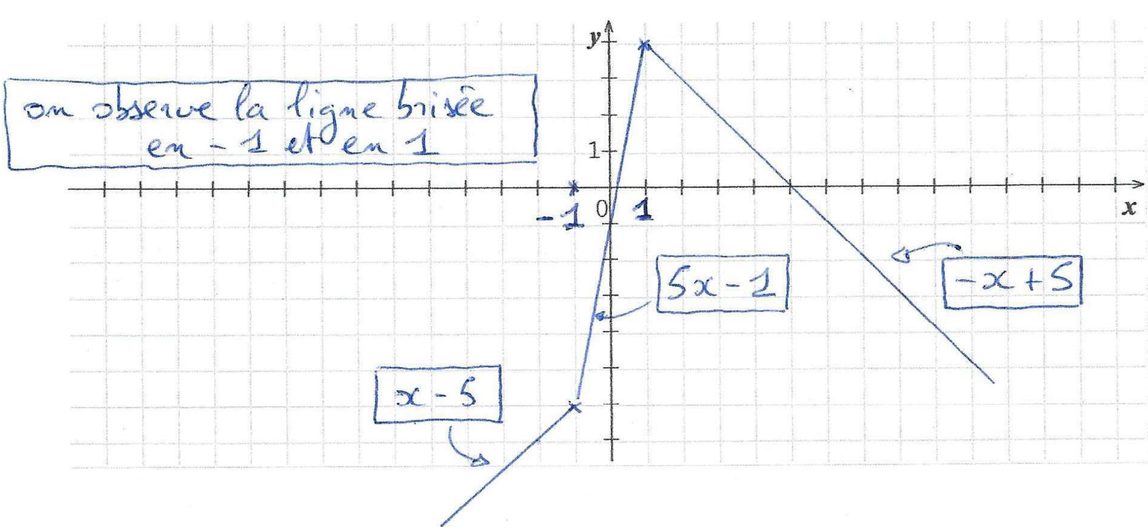
x	$-\infty$		6		$+\infty$
Signes de $0{,}5x-3$		$-$	0	$+$	
Expression de $\lvert 0{,}5x-3 \rvert$		$-(0{,}5x-3) = -0{,}5x+3$		$0{,}5x-3$	



Un deuxième exemple, avec deux valeurs absolues

On considère la fonction définie par $g(x) = 2|x+1| - |-3x+3|$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signes de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Expression de $\lvert x+1 \rvert$		$-(x+1) = -x-1$		$x+1$		$x+1$	
Signes de $-3x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
Expression de $\lvert -3x+3 \rvert$		$-3x+3$		$-3x+3$		$-(-3x+3) = 3x-3$	
Expression de $2\lvert x+1 \rvert - \lvert -3x+3 \rvert$		$2(-x-1) - (-3x+3) = x-5$		$2(x+1) - (-3x+3) = 5x-1$		$2(x+1) - (3x-3) = -x+5$	



La fonction inverse : définition , propriétés

Ensemble de définition

C'est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $\frac{1}{x}$.

Ici , l'ensemble de définition est $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$. On ne peut pas calculer $\frac{1}{x}$ lorsque x est nul, car on ne peut pas diviser par 0 , qui devient ce que l'on appelle une "*valeur interdite*".

→ ***application pour la recherche des ensembles de définition***

Il faut s'assurer que le *dénominateur* d'une écriture fractionnaire soit toujours *non nul* !!

• pour $f(x) = \frac{x+1}{2x+10}$, on résout l'équation $2x+10=0$

→ on obtient la "valeur interdite" -5 .

On a donc : $D_f =]-\infty\,;-5\,[\,\cup\,]-5\,;+\infty\,[$

• pour $g(x) = \frac{5x+2}{x^2-2x-3}$, on résout $x^2-2x-3=0$

→ on obtient les "valeurs interdites" -1 et 3 .

On a donc : $D_g =]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,]-1\,;3\,[\,\cup\,]\,3\,;+\infty\,[$

valeur interdite pour $\frac{1}{x}$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Attention : il y a, pour cette fonction inverse, une valeur interdite qui coupe le tableau en deux parties.

On ***ne pourra pas dire*** que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$.

Il faudra dire que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0\,[$ ***et décroissante sur*** $]\,0\,;+\infty\,[$.

Application des variations

Dans chaque intervalle, la fonction inverse est décroissante, donc on aura *INVERSION de l'ordre.*

sur $]-\infty\,;0\,[$, on sait que $-10 < -6$

Donc on a $\frac{1}{-10} \boxed{>} \frac{1}{-6}$ (inversion) → $-\frac{1}{10} > -\frac{1}{6}$

sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on sait que $4 < 7$

Donc on a $\frac{1}{4} \boxed{>} \frac{1}{7}$ (inversion)

Trouver des variations avec des opérations élémentaires (1)

De nombreux cours proposent, pour cette partie, des règles et propriétés qui sont trop souvent mal utilisées dans les exercices d'applications (c'est trop "mécanique" et mal compris au final).
Du coup, lorsque une fonction s'obtient par opérations de plusieurs autres fonctions , ***je pense que*** le plus efficace est de s'intéresser directement à la conservation ou à l'inversion de l'ordre (on revient finalement ici à la définition de la notion de croissance ou de décroissance).
Ne pas oublier que le tableau de variations d'une fonction, c'est la meilleure photographie possible de cette fonction. Cela nous permettra entre autre de proposer des encadrements.
L'étude des fonctions dérivées en Première nous permettra d'avoir un nouvel outil d'étude des variations.

Exemple : Etude des variations de la fonction définie par $f(x) = -2\sqrt{x} + 5$ sur l'intervalle $[0 ; 9]$

sur $[0;9]$, on part de deux nombres : $a \boxed{<} b$

On obtient : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ($\sqrt{\ }$ est croissante → ordre conservé)

→ $-2\sqrt{a} > -2\sqrt{b}$ (on multiplie par un négatif → ordre inversé)

→ $-2\sqrt{a} + 5 > -2\sqrt{b} + 5$ (on ajoute juste 5 → ordre conservé)

soit $f(a) \boxed{>} f(b)$

entre le départ et l'arrivée,
il y a une inversion de l'ordre
→ f est donc décroissante sur $[0;9]$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	9
Variations de la fonction f	5 ↘	-1

→ ***application***

On a : $f(0) = -2\times\sqrt{0} + 5 = -2\times 0 + 5 = 5$
$f(9) = -2\times\sqrt{9} + 5 = -2\times 3 + 5 = -1$

→ pour tout $x \in [0;9]$, on a : $-1 \leq f(x) \leq 5$

Trouver des variations avec des opérations élémentaires (2)

De nombreux cours proposent, pour cette partie, des règles et propriétés qui sont trop souvent mal utilisées dans les exercices d'applications (c'est trop "mécanique" et mal compris au final).
Du coup, lorsque une fonction s'obtient par opérations de plusieurs autres fonctions , ***je pense que*** le plus efficace est de s'intéresser directement à la conservation ou à l'inversion de l'ordre (on revient finalement ici à la définition de la notion de croissance ou de décroissance).
Ne pas oublier que le tableau de variations d'une fonction, c'est la meilleure photographie possible de cette fonction. Cela nous permettra entre autre de proposer des encadrements.
L'étude des fonctions dérivées en Première nous permettra d'avoir un nouvel outil d'étude des variations.

Exemple: Etude des variations de la fonction définie par $g(x) = 2 - \dfrac{6}{3x^2 - 1}$ sur l'intervalle [1 ; 3]

sur [1 ; 3], on part de deux nombres : $a \boxed{<} b$

On obtient : $a^2 < b^2$ (fonction carrée croissante sur [1 ; 3] → ordre conservé)

→ $3a^2 - 1 < 3b^2 - 1$ (on multiplie par un positif et on soustrait 1 → ordre conservé)

→ $\dfrac{1}{3a^2-1} > \dfrac{1}{3b^2-1}$ (fonction inverse décroissante → ordre inversé)

→ $\dfrac{-6}{3a^2-1} < \dfrac{-6}{3b^2-1}$ (on multiplie par un négatif → ordre inversé)

→ $2 - \dfrac{6}{3a^2-1} < 2 - \dfrac{6}{3b^2-1}$ (on ajoute juste 2 → ordre conservé)

soit $g(a) \boxed{<} g(b)$

entre le départ et l'arrivée, il y a conservation de l'ordre → g est donc croissante sur [1 ; 3]

On obtient le tableau de variations suivant :

x	1	3
Variations de la fonction g	-1 ↗	$\dfrac{23}{13}$

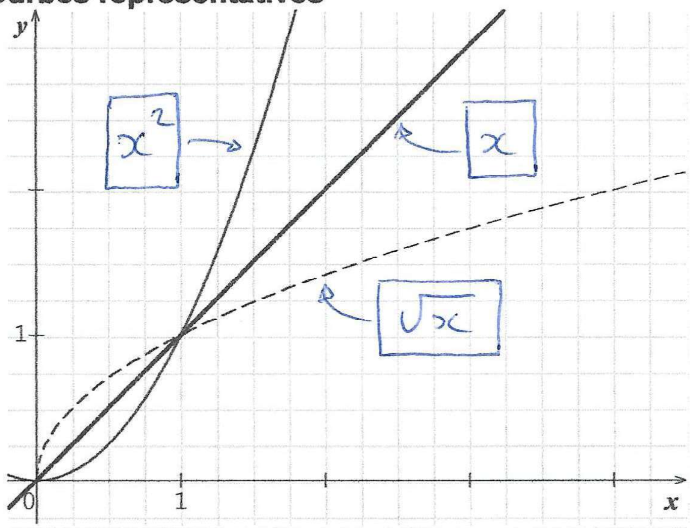
→ ***application***

On calcule $g(1) = -1$ et $g(3) = \dfrac{23}{13}$

→ pour tout $x \in [1 ; 3]$, on a : $-1 \leq g(x) \leq \dfrac{23}{13}$

Comparaison entre x, $\sqrt{x}$ et x^2

Observation des 3 courbes représentatives



On constate que (et on pourrait le démontrer) :

pour $0 \leq x \leq 1$, on a : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

pour $x \geq 1$, on a : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$

Utilisation de ces comparaisons

On va pouvoir aller contre certaines idées reçues qui s'avèrent mathématiquement fausses.
Par exemple, les affirmations du type "*prendre un nombre au carré , ça l'agrandit*" et "*la racine carrée d'un nombre est forcément plus petite que ce nombre*" sont fausses.
En fait, cela dépend de quels nombres on parle, c'est à dire dans quel intervalle on se situe !!

Avec le nombre 0,81 qui est dans l'intervalle $[0;1]$,

on peut écrire $0{,}81^2 \leq 0{,}81 \leq \sqrt{0{,}81}$

(on peut le vérifier car $0{,}81^2 = 0{,}6561$ et $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$)

Avec le nombre 1,44 qui est supérieur à 1,

on peut écrire $\sqrt{1{,}44} \leq 1{,}44 \leq 1{,}44^2$

(on peut le vérifier car $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ et $1{,}44^2 = 2{,}0736$)

Comment comparer algébriquement deux fonctions

Méthode de base

On considère déjà savoir comparer *graphiquement* deux fonctions (*petit rappel*: une fonction f était ***inférieure*** à une fonction g , sur un intervalle, lorsque la courbe de f était ***en dessous*** de la courbe de g.
On va maintenant apprendre à comparer *algébriquement* deux fonctions, c'est à dire par le calcul !!

Pour *comparer* deux fonctions définies par $f(x)$ et $g(x)$:
- on *calcule* $f(x) - g(x)$, en simplifiant autant que possible l'expression.
- on *réalise le tableau de signes* du résultat (***revoir les signes des fonctions affines et des trinômes !***).
- les intervalles pour lesquels on obtient un " - " dans le tableau signifient que $f(x) - g(x)$ est négatif sur cet intervalle , et donc que $f(x) \leqslant g(x)$.
- les intervalles pour lesquels on obtient un " + " dans le tableau signifient que $f(x) - g(x)$ est positif sur cet intervalle , et donc que $f(x) \geqslant g(x)$.

Un exemple basique

On va comparer sur $]-\infty ; +\infty[$ les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -3x + 4$

On calcule $f(x) - g(x) = x^2 - (-3x+4) = x^2 + 3x - 4$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signes de $x^2 + 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion

On a : $f(x) \geqslant g(x)$ sur $]-\infty ; -4] \cup [1 ; +\infty[$
$f(x) \leqslant g(x)$ sur $[-4 ; 1]$

Un exemple plus technique

On va comparer sur $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ les fonctions définies par $f(x) = x + 5$ et $g(x) = \dfrac{7}{x-1}$

On calcule $f(x) - g(x) = x + 5 - \dfrac{7}{x-1} = \dfrac{(x+5)(x-1) - 7}{x-1}$

$\rightarrow$ on obtient $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x-1}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-6		1		2		$+\infty$
Signes de $x^2 + 4x - 12$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signes de $x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signes de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Conclusion

valeur interdite

On a : $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[-6 ; 1[\cup [2 ; +\infty[$
$f(x) \leqslant g(x)$ sur $]-\infty ; -6] \cup]1 ; 2]$