Qu'est ce que c'est ?
La définition du produit scalaire

Je pense qu'il est important, quand vous débutez ce chapitre dans votre classe, de prendre un peu de recul (et c'est forcément dur dans un début de chapitre) pour que le produit scalaire ne devienne pas un "truc" déconnecté , qu'on ne sait pas bien calculer , qu'on ne sait pas bien pourquoi on doit le calculer.

A retenir pour un bon départ

Le produit scalaire est juste un opérateur entre deux vecteurs.

Rappelons nous quelques connaissances sur les opérations :

- nous savons faire l'*addition* de deux vecteurs (propriété de Chasles ...)
- nous savons faire la *soustraction* de deux vecteurs (en changeant la soustraction en addition, et en prenant l'opposé du vecteur qui était à soustraire : par exemple $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$).
- nous ne pourrons jamais multiplier deux vecteurs entre eux (ne ***jamais*** écrire $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{RT}$).
  Mais nous allons apprendre à faire le *produit scalaire* de deux vecteurs (qui s'écrira avec juste un point entre les deux vecteurs, soit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RT}$). Ce *produit scalaire* n'est pas une multiplication , mais ses propriétés de calculs vont beaucoup y ressembler .
- la division de deux vecteurs n'aura ***jamais*** aucun sens. Elle ne sera ***jamais*** possible, réalisable.

Une particularité importante du résultat

Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un nombre , ce n'est pas un vecteur.

Encore un petit rappel des connaissances :

- en faisant l'*addition* de deux vecteurs , on sait que le résultat est un vecteur.
- en faisant la *soustraction* de deux vecteurs , on sait que le résultat est un vecteur.
- MAIS en faisant le *produit scalaire* de deux vecteurs , le résultat obtenu est un ***nombre*** (pas de flêche sur le résultat d'un produit scalaire).
  On aura par exemple $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RT} = 5$ (ce qui signifie que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RT}$ est égal à 5).

Ce nombre va sembler peu compréhensible dans un premier temps. Il faudra juste bien apprendre à calculer les produits scalaires car, par la suite; les applications en mathématiques sont très nombreuses, sans parler du lien avec la physique (le produit scalaire va représenter le travail d'une force).

Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Nous aurons, dans ce chapitre, trois moyens pratiques pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs.

- une formule utilisant le *cosinus* de l'angle formé par les deux vecteurs.
- un calcul utilisant la *projection orthogonal* d'un des vecteurs sur le deuxième.
- une formule avec les *coordonnées* des vecteurs. Cette formule est très pratique, **MAIS** elle n'est utilisable que si on se place dans un ***repère orthonormé***.

Quelques points importants, à retenir tout au long du chapitre

- Si les deux vecteurs ont le *même sens* , alors leur produit scalaire sera toujours un nombre *POSITIF*. Mais, si les vecteurs sont de *sens opposés*, alors leur produit scalaire sera *NEGATIF*.

-- Si un des vecteurs est *nul* (égal à $\vec{0}$) alors le produit scalaire des deux vecteurs est *nul* (égal à 0).

--- Si les vecteurs sont orthogonaux ($\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{RT}$) alors leur produit scalaire est nul, soit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RT} = 0$.

La norme d'un vecteur

Définition et notation

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\| \overrightarrow{AB} \|$ et cette norme est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Il y a donc un lien très fort entre les mots "*norme*" , "*longueur*" et "*distance*".
On aura donc :

norme $\| \overrightarrow{AB} \|$ **=** ***longueur AB du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ **=** ***distance AB***

Cette année, les vecteurs seront notés avec une seule lettre minuscule (comme, par exemple, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) ou avec deux lettres majuscules (comme, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{EF}$).
Il faut tout de suite bien apprendre que, suivant le cas, on n'aura pas les mêmes possibilités d'écritures.
En effet, on pourra écrire :

- norme du vecteur $\overrightarrow{AB} = \| \overrightarrow{AB} \| = AB$ *(on peut enlever la flêche et les doubles barres).*
- norme du vecteur $\vec{u} = \| \vec{u} \|$ *(attention, il est impossible ici d'écrire "u" tout seul).*

La formule pour le calcul d'une norme

Pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x ; y)$,

on a : $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Des exemples de calculs de normes

→ pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (3 ; 5)

On calcule : $\| \vec{u} \| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

→ pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont on connait directement les coordonnées (- 4 ; 6)

On calcule : $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

→ pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont on connait les coordonnées des points A (3 ; 5) et B (2 ; 9)

Méthode 1 *: on calcule les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *et on utilise la formule de la norme*

On calcule $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A = 2 - 3 = -1 \\ y_B - y_A = 9 - 5 = 4 \end{array} \right.$

et on a $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

Méthode 2 *: on utilise la formule de la distance AB (voir "Les fiches de Seconde")*

On a : $\| \overrightarrow{AB} \| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

soit $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(2-3)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2}$

soit $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

Comment calculer un produit scalaire avec le cosinus

C'est en général la première formule vue en classe et elle correspond globalement à une définition du produit scalaire. Cette formule nécessite de connaitre les longueurs des deux vecteurs et l'angle qu'ils forment entre eux.

La formule

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on connait l'angle ($\vec{u}$, $\vec{v}$), on aura : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
Avec deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on connait l'angle ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$), on aura : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lVert \overrightarrow{AB} \rVert \times \lVert \overrightarrow{AC} \rVert \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Exemples

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\lVert \vec{u} \rVert = 4$; $\lVert \vec{v} \rVert = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ (soit 60°)   On a : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10$ On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$
Avec deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $\lVert \overrightarrow{AB} \rVert = 3$; $\lVert \overrightarrow{AC} \rVert = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ (soit 45°)   On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (on garde la valeur exacte)   Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lVert \overrightarrow{AB} \rVert \times \lVert \overrightarrow{AC} \rVert \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}$
Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\lVert \vec{u} \rVert = 2$; $\lVert \vec{v} \rVert = 6$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ (soit 90°)   On a : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 6 \times 0 = 0$ On retrouve donc la règle suivante :   si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Remarque : si on a un vecteur nul (par exemple, $\vec{u} = \vec{0}$), alors on retrouve bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ car on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Produit scalaire et vecteurs colinéaires

La formule du produit scalaire avec le cosinus va nous permettre d'obtenir un résultat très intéressant pour les vecteurs colinéaires, car *deux vecteurs colinéaires de même sens* forment un angle nul ($\cos 0 = 1$) et *deux vecteurs colinéaires de sens opposé* forment un angle plat égal à π ($\cos \pi = -1$).

Premier résultat avec des points alignés

→ on cherche $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ avec les points A , B , C alignés et avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ *de même sens.*

On a : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB \times AC \times \cos 0$, avec $\cos 0 = 1$

On obtient alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \mathbf{AB \times AC}$

→ on cherche $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ avec les points A , B , C alignés et avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ *de sens opposé.*

On a : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB \times AC \times \cos \pi$, avec $\cos \pi = -1$

On obtient alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \mathbf{-\, AB \times AC}$

Remarque : on donnera toujours un *résultat positif* avec deux vecteurs de *même sens* ,
et on donnera toujours un *résultat négatif* avec deux vecteurs de *sens opposé* !

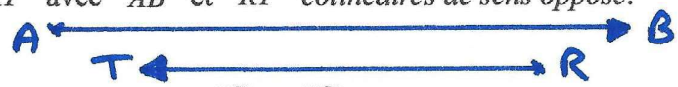
Et pour des vecteurs colinéaires "non alignés"

→ on cherche $\vec{AB} \cdot \vec{RT}$ avec $\vec{AB}$ et $\vec{RT}$ *colinéaires de même sens.*

On a : $\vec{AB} \cdot \vec{RT} = AB \times RT \times \cos(\vec{AB}, \vec{RT}) = AB \times RT \times \cos 0$, avec $\cos 0 = 1$

On obtient alors $\vec{AB} \cdot \vec{RT} = \mathbf{AB \times RT}$

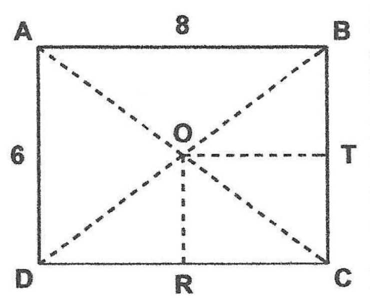
→ on cherche $\vec{AB} \cdot \vec{RT}$ avec $\vec{AB}$ et $\vec{RT}$ *colinéaires de sens opposé.*



On a : $\vec{AB} \cdot \vec{RT} = AB \times RT \times \cos(\vec{AB}, \vec{RT}) = AB \times RT \times \cos \pi$, avec $\cos \pi = -1$

On obtient alors $\vec{AB} \cdot \vec{RT} = \mathbf{-\, AB \times RT}$

Application : avec un rectangle ABCD de côté AB = 8 et AD = 6 , avec le point 0 centre du rectangle.



On a : $\vec{DR} \cdot \vec{DC} = 4 \times 8 = 32$

$\vec{TB} \cdot \vec{TC} = \boxed{-}3 \times 3 = \boxed{-}9$

vecteurs opposés
donc résultat négatif

$\vec{AD} \cdot \vec{BT} = 6 \times 3 = 18$

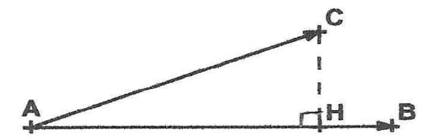
$\vec{AB} \cdot \vec{CR} = \boxed{-}8 \times 4 = \boxed{-}32$

vecteurs opposés
donc résultat négatif

Comment calculer un produit scalaire avec une projection orthogonale

C'est souvent la méthode la moins bien maitrisée, mais ne partons pas perdant d'avance.
Il suffira, en fait, de réaliser la projection orthogonale d'un vecteur sur le deuxième vecteur (et donc on cherchera des angles droits sur la figure).

Le principe de base

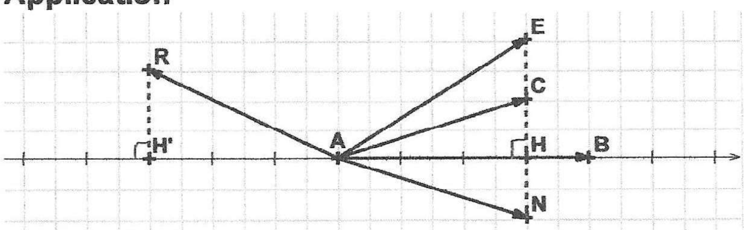


Le point C se projette orthogonalement (avec un angle droit) sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$: on obtient le point H.

On a alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

Avec ce point H, le produit scalaire devient le produit de deux longueurs

Application



Les points E, C et N se projettent tous sur H. Donc les produits scalaires sont tous égaux.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

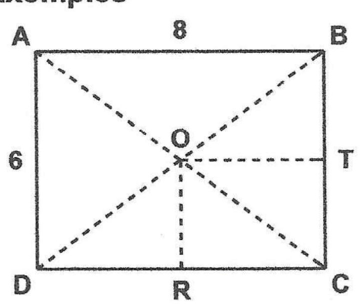
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR} = \boxed{-} AB \times AH' = \boxed{-} 4 \times 3 = \boxed{-} 12$

vecteurs opposés → résultat négatif

Exemples



On a : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = DC \times DC = 8 \times 8 = 64$

le point B se projette sur C

On a : $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO} = CB \times CT = 6 \times 3 = 18$

le point O se projette sur T

On a : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} = DC \times DR = 8 \times 4 = 32$

le point O se projette sur R

On a : $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AO} = - CB \times BT = - 6 \times 3 = - 18$

ici, on projette deux points : O et A se projettent sur T et B
De plus, les vecteurs sont opposés → produit scalaire négatif

Comment calculer un produit scalaire dans un repère orthonormé

C'est une formule très facile à retenir et très simple à appliquer MAIS elle a une très forte contrainte :
on ne peut utiliser cette formule qu'en travaillant dans un REPERE ORTHONORME.

La formule

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$,
on aura, ***dans un repère orthonormé*** : $\vec{u}\ .\ \vec{v} = x \times x' + y \times y'$

Remarques :

- Très souvent, ce sera à nous de calculer *les coordonnées de chaque vecteur.*
- On privilégiera l'écriture des *coordonnées en colonne* plutôt qu'en ligne : c'est plus visuel !

Exemples

Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\ (2\ ;\ 5)$ et $\vec{v}\ (4\ ;\ 3)$.
On va calculer $\vec{u}\ .\ \vec{v}$

On a les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$

On a donc : $\vec{u}.\vec{v} = 2\times4 + 5\times3 = 8 + 15 = 23$

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 3) B (4 ; 7) et C (5 ; 9).
On va calculer $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B - x_A = 4-2=2\\y_B - y_A = 7-3 = 4\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}x_C - x_A = 5-2=3\\y_C - y_A = 9-3=6\end{matrix}\right.$

On obtient les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right.$

On a donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times3 + 4\times6 = 6 + 24 = 30$

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 4) B (5 ; 1) R (1 ; - 1) et T (7 ; 5).
On va calculer $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{RT}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B - x_A = 5-2=3\\y_B - y_A = 1-4=-3\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{RT}\left|\begin{matrix}x_T - x_R = 7-1=6\\y_T - y_R = 5-(-1)=6\end{matrix}\right.$

On obtient les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}3\\-3\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{RT}\left|\begin{matrix}6\\6\end{matrix}\right.$

On a donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{RT} = 3\times6 + (-3)\times6 = 18 + (-18) = 0$

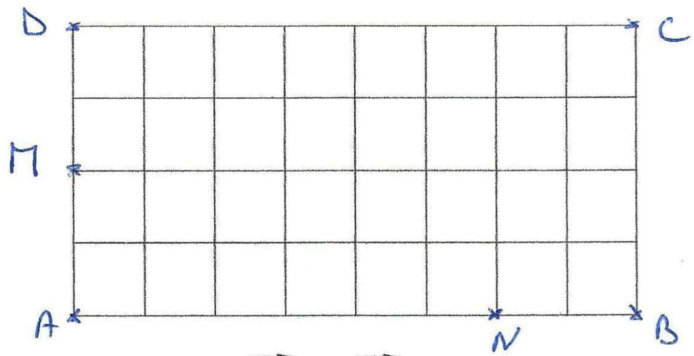
On a donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{RT} = 0$, soit $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{RT}$ ou $(AB) \perp (RT)$

Comment définir un repère orthonormé pour calculer un produit scalaire

Une compétence très intéressante à acquérir cette année est d'avoir *l'initiative* de définir soi-même un repère orthonormé, afin de pouvoir *exprimer les coordonnées* des différents points et, ainsi, de pouvoir utiliser la formule du produit scalaire valable dans les repères orthonormés.

Un exemple

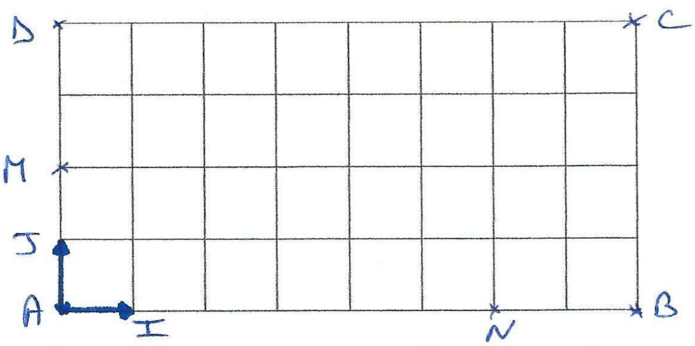
Dans un rectangle ABCD, on considère les points N et M tel que $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{AD}$.



On veut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DN}$

Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ n'est pas orthonormé

→ on va travailler dans le repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ car on a bien AI et AJ de même longueur.



Dans ce repère, on exprime les coordonnées des points.

On a : $M \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ $C \begin{vmatrix} 8 \\ 4 \end{vmatrix}$ $D \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}$ $N \begin{vmatrix} 6 \\ 0 \end{vmatrix}$

On obtient donc : $\overrightarrow{MC} \begin{vmatrix} 8-0=8 \\ 4-2=2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{DN} \begin{vmatrix} 6-0=6 \\ 0-4=-4 \end{vmatrix}$

On a donc les vecteurs $\overrightarrow{MC} \begin{vmatrix} 8 \\ 2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{DN} \begin{vmatrix} 6 \\ -4 \end{vmatrix}$

On en déduit $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DN} = 8 \times 6 + 2 \times (-4) = 48 + (-8) = 40$

Comment calculer un angle à l'aide du produit scalaire

C'est une très belle application du produit scalaire.
Le principe est plutôt simple : on utilise la formule $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
Du coup, en connaissant les valeurs de $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$, on en déduit l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ en utilisant la touche $\boldsymbol{cos^{-1}}$ de la calculatrice.

Exemple 1 : on connait déjà $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

Déterminer une valeur, en degrés, de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.

On remplace les valeurs dans la formule :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

→ on obtient : $6 = 3 \times 4 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

soit $6 = 12 \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

On a donc : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

soit $(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

Exemple 2 : on ne connait que les coordonnées de trois points

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 3) B (3 ; 7) et C (8 ; 2).
Déterminer une valeur approchée, en degrés, de l'angle $\widehat{BAC}$, *qui correspond à* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

On calcule $\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} 3-2=1 \\ 7-3=4 \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{AC} \left| \begin{array}{l} 8-2=6 \\ 2-3=-1 \end{array} \right.$

et on calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 6 + 4 \times (-1) = 6 + (-4) = 2$

On calcule alors $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$ avec la formule de la norme

On obtient : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$

On remplace les valeurs dans la formule :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

→ on obtient : $2 = \sqrt{17} \times \sqrt{37} \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

On a donc : $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{\sqrt{17} \times \sqrt{37}}$

soit $(\widehat{BAC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{17} \times \sqrt{37}}\right) \approx 85°$

Les propriétés de calcul du produit scalaire

Nous allons voir sur cette fiche les propriétés essentielles (à apprendre par coeur) du produit scalaire.
Et dans les fiches suivantes, nous utiliserons ces propriétés dans les calculs, dans les démonstrations ..etc..

Propriété 1 : on peut intervertir les vecteurs entre eux

On dit alors que le produit scalaire est *symétrique*.

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AB}$

Propriété 2 : avec des vecteurs multipliés par des coefficients

On peut alors regrouper les coefficients entre eux et les multiplier.

On a : $\vec{u} \cdot 3\vec{v} = 3\,\vec{u} \cdot \vec{v}$

$2\vec{u} \cdot (-4\vec{v}) = 2 \times (-4)\,\vec{u} \cdot \vec{v} = -8\,\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété 3 : en prenant l'opposé d'un des vecteurs

Le résultat du produit scalaire *change de signe* si on prend l'*opposé* d'un des vecteurs.

On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{RT} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RT}$

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} = -\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF}$

Remarque : *le produit scalaire reste donc égal si on prend l'opposé des deux vecteurs.*

On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

Propriété 4 : savoir "développer" une expression du type $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

La gestion de ce type de calcul va ressembler aux règles classiques du développement algébrique.

On a : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$2\vec{u} \cdot (3\vec{v} - 4\vec{w}) = 6\,\vec{u} \cdot \vec{v} - 8\,\vec{u} \cdot \vec{w}$

Propriété 5 : bien comprendre l'écriture $\vec{u}^{\,2}$ ou $\overrightarrow{AB}^{\,2}$

L'écriture $\vec{u}^{\,2}$ ne correspond pas à une multiplication $\vec{u} \times \vec{u}$ mais bien au produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$

On a : $\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u}$ (on n'écrit pas u^2)

$\overrightarrow{AB}^{\,2} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$

Remarque : *cette écriture correspond, au final, à mettre les* ***longueurs des vecteurs au carré*** .

Propriétés de calculs avec norme et produit scalaire

Nous abordons ici une partie du chapitre pour laquelle les *démonstrations* sont aussi importantes que les résultats eux mêmes. En effet, ces *démonstrations* nous permettent de mettre en place et d'utiliser les différentes *propriétés du produit scalaire*.

Propriété 1 : produit scalaire avec les normes

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a alors l'égalité suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Démonstration :

On a : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$\boxed{\text{car } \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}}$

On obtient : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$\boxed{\text{car } \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$

On en déduit : $2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

soit $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Propriété 2 : norme d'une somme

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a alors l'égalité suivante :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Démonstration :

On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$\boxed{\text{car } \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}}$

On obtient : $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\boxed{\text{car } \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$

Application du produit scalaire : la propriété d'Al-Kashi

C'est une très belle application du produit scalaire qui va nous permettre de généraliser la propriété de Pythagore. On pourra alors calculer une longueur dans un triangle, même s'il n'est pas rectangle.
Sur cette fiche, la *démonstration* et la *formule* obtenue sont toutes les deux importantes à retenir.

La formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC quelconque, on a l'égalité suivante :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Démonstration :

On a : $\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ $\boxed{\text{propriété de Chasles}}$

Donc $BC^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\to BC^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$

$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}}$

On obtient : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

soit $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\underbrace{AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}_{\text{c'est } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$

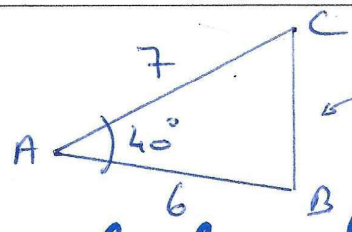
$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = BA^2 = AB^2}$

Utilisation de cette formule d'Al-Kashi

Dans un triangle quelconque, si on connait la longueur de deux côtés du triangle et la valeur de l'angle qu'ils forment, alors on pourra calculer la longueur du troisième côté (qui est opposé à l'angle donné).

Exemple
Soit un triangle ABC tel que AB = 6 , AC = 7 et ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) = ($\widehat{BAC}$) = 40°.
On veut calculer la longueur du côté BC.

Croquis



$\boxed{\text{on cherche BC}}$

On applique la formule d'Al-Kashi

$\to BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos(40°)$

On en déduit BC^2, et ainsi $BC \simeq 4,54$

Application du produit scalaire : recherche d'un ensemble de points

La problématique à résoudre va être la suivante :

On cherche à déterminer à quel ensemble (droite, cercle ...) correspondent les points M vérifiant une égalité du type $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k$ (où k est un nombre réel quelconque) .

Cas 1 : on cherche les points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ signifie $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

→ on réactive nos souvenirs de collège sur le cercle circonscrit et on conclut que l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB].

Cas 2 : on cherche les points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k$ (avec $k \neq 0$)

Pour trouver cet ensemble de point, on va devoir transformer l'écriture $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}$ et c'est avec l'écriture transformée que l'on pourra conclure.

Transformation de l'écriture $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}$

En considèrant le point I milieu du segment [AB] , on a : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$

Démonstration

On a : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\,.\,(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$= \overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{IB}$

or $\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{IA}$

$= \overrightarrow{MI}\,.\,(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}) = \vec{0}$

↳ vecteur nul !

et $\overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{IB} = -\dfrac{AB}{2}\times\dfrac{AB}{2} = -\dfrac{1}{4}AB^2$ ← vecteurs colinéaires et opposés

Om obtient bien : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$

Application

Pour résoudre $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 3$ (avec par exemple $AB = 8$)

on résout $MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 = 3$ (I milieu de [AB])

soit $MI^2 - \dfrac{1}{4}\times 8^2 = 3$

On obtient : $MI^2 = 3 + \dfrac{1}{4}\times 8^2 = 19 \rightarrow MI = \sqrt{19}$

On obtient le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{19}$

Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires

C'est un résultat essentiel à retenir, en prévision de l'année de Terminale. Il utilise une propriété du produit scalaire qui nous servira encore l'an prochain avec la géométrie dans l'espace.

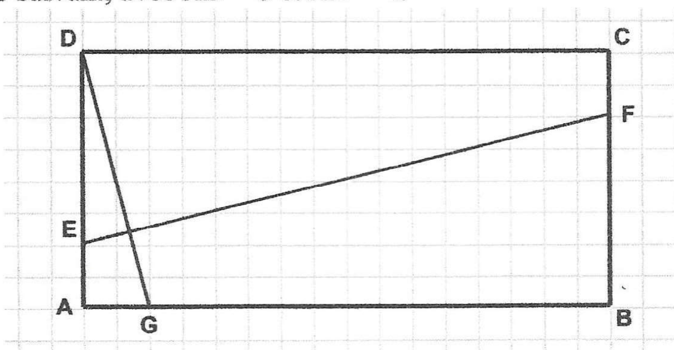
La propriété

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$

Conséquence :
Pour montrer que deux droites (d) et (d') sont *perpendiculaires*, on utilisera des vecteurs directeurs respectifs de chacune des droites et on montrera que le *produit scalaire* des deux vecteurs est nul.

Exemple

On considère le rectangle suivant, avec AB = 8 et AD = 4.



Les points E , F et G correspondent à : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

On va montrer que les droites (EF) et (DG) sont *perpendiculaires*.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE})$

Dans ce repère, on a : $E\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $F\left|\begin{matrix}8\\3\end{matrix}\right.$ $D\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$ $G\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

On obtient : $\overrightarrow{EF}\left|\begin{matrix}8-0=8\\3-1=2\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{DG}\left|\begin{matrix}1-0=1\\0-4=-4\end{matrix}\right.$

On calcule donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG}$ avec $\overrightarrow{EF}\left|\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{DG}\left|\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right.$

On a : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG} = 8\times 1 + 2\times(-4) = 8+(-8) = 0$

On a donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG} = 0$, soit $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$.

<u>Conclusion</u> : les droites (EF) et (DG) sont perpendiculaires.