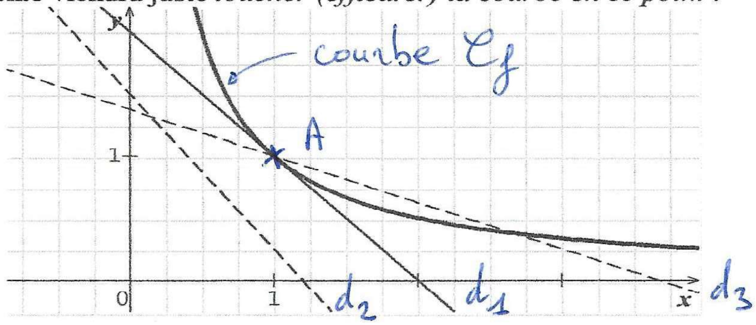
## Nombre dérivé, coefficient directeur de tangente

**Qu'est ce qu'une tangente ?**

Quand on a la courbe représentative d'une fonction, on pourra s'intéresser, *en un point donné*, à ce qu'on appellera la *tangente* à cette courbe.
Une tangente sera toujours lié *à une courbe ET à un point* ➡ ***C'est la tangente en un point à une courbe***.
Graphiquement, la tangente viendra juste *toucher (effleurer) la courbe en ce point* .




La tangente à la courbe en A est la droite $(d_1)$.
La droite $(d_2)$ n'est pas une tangente en A, car cette droite ne touche même pas la courbe.
La droite $(d_3)$ n'est pas une tangente en A, car elle ne touche pas la courbe juste sur le point A.

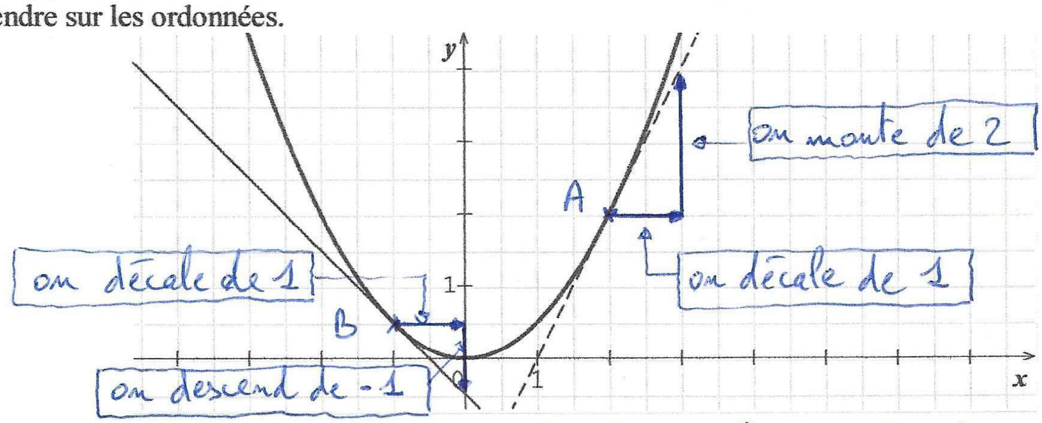
**La définition du nombre dérivé**

Le nombre dérivé en un point EST ÉGAL au coefficient directeur de la tangente en ce point.

On retiendra qu'un élément graphique sur la courbe (*une tangente et son coefficient directeur*) pourront se déterminer avec un élément algébrique (*avec le calcul du nombre dérivé*).

**Coefficient directeur de la tangente**

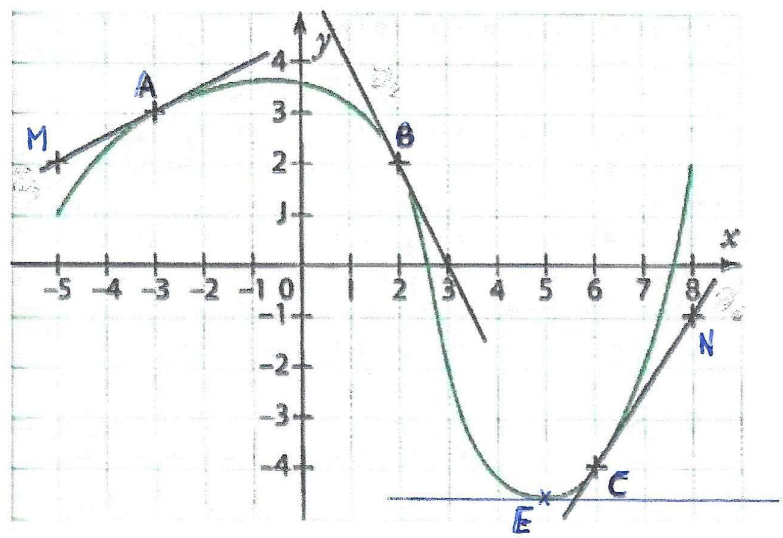
Comme pour n'importe quelle droite, on peut définir le coefficient directeur de la tangente en un point. Pour rappel, cela revient à "*décaler de 1 sur les abscisses*" pour voir de combien il faut monter ou descendre sur les ordonnées.




Le coefficient directeur de la tangente en A est égal à 2.
Le coefficient directeur de la tangente en B est égal à -1.

# Comment trouver graphiquement un nombre dérivé
# Tangente horizontale

Sur le graphique suivant, on donne la courbe représentative d'une fonction $h$ . On veut donner, à l'aide de ce graphique, les valeurs de $h(-3)$ , $h(2)$ puis de $h'(-3)$ , $h'(2)$ .




## Préambule

Il ne faut surtout pas confondre $h(2)$ et $h'(2)$.
En effet, $h(2)$ correspond à *l'image* du nombre 2. C'est *l'ordonnée* du point B (qui a pour abscisse 2).
Par contre, $h'(2)$ est égal au *coefficient directeur de la tangente* pour ce point B d'abscisse 2.

## Comment trouver *h* ( - 3 ) et *h* ( 2 )

Il nous suffit ici de lire l'*image* (soit *l'ordonnée*) correspondante à chacun des nombres proposés.

On a $\boldsymbol{h(-3)=3}$ ( cela concerne le ***point A*** ).
On a $\boldsymbol{h(2)=2}$ ( cela concerne le ***point B*** ).

## Comment trouver *h* ' ( - 3 ) et *h* ' ( 2 )

On va avoir besoin de voir ici *deux méthodes* qui donnent graphiquement le coefficient directeur.

***Méthode 1*** : pour $h'(2)$ , cela concerne la tangente ***sur le point B*** .
→ on part de B, on se décale de 1 sur les abscisses et il faut descendre de – 2 pour rejoindre la tangente.
On obtient : $\boldsymbol{h'(2)=-2}$

***Méthode 2*** : pour $h'(-3)$ , cela concerne la tangente ***sur le point A*** .
→ en décalant de 1 sur les abscisses, on pourrait dire que l'on monte de 0,5 cela serait imprécis.
On peut alors utiliser une formule de calcul : $\dfrac{Ym-Ya}{Xm-Xa} = \dfrac{2-3}{-5-(-3)} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$
On obtient : $\boldsymbol{h'(-3)=0{,}5}$

**Remarque** : pour le point C , on calculerait $\dfrac{Yn-Yc}{Xn-Xc} = \dfrac{-1-(-4)}{8-6} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \rightarrow \boldsymbol{h'(6)=1{,}5}$

## Tangente horizontale et nombre dérivé

***Règle fondamentale***
Si la tangente est *horizontale* en un point , alors le *nombre dérivé* correspondant est *égal à 0* .
Par exemple, on a ici une tangente horizontale sur le point E ( d' abscisse 5 ) → on a $\boldsymbol{h'(5)=0}$.

# La notion de limite

**Qu'est ce qu'une limite de fonction ?**

L'aspect algébrique qui concerne le nombre dérivé nous amènera à chercher la *limite* d'une fonction $f$ pour $h$ qui tend vers 0. Cette limite se note : $\lim_{h \to 0} f(h)$ .

Pour trouver cette limite, on pourra :

- soit imaginer que $h$ se rapproche de plus en plus de 0 et, "intuitivement", on comprendra vers quelle valeur se rapprochera $f(h)$.
- soit faire un tableau, à l'aide de la calculatrice, avec quelques valeurs (on remplace $h$ par 0,1 puis par 0,01 puis par 0,001 ..) pour bien visualiser les résultats et conclure.

**Exemple 1** : On cherche $\lim_{h \to 0} (5+h)$ .

Il est possible de voir, lorsque $h$ se rapproche de 0, que l'expression ( $5 + h$ ) se rapproche de 5.

On peut aussi s'aider du tableau de valeurs suivant

| Valeurs de $h$ | Résultats pour ( $5 + h$ ) |
|---|---|
| 0,1 | 5,1 |
| 0,01 | 5,01 |
| 0,001 | 5,001 |

**Au final, on peut conclure que** $\lim_{h \to 0} (5+h) = \mathbf{5}$ **.**

**Exemple 2** : On cherche $\lim_{h \to 0} (2+3h+4h^2)$ .

Il est possible de voir, lorsque $h$ se rapproche de 0, que l'expression $2 + 3h + 4h^2$ se rapproche de 2.

On peut aussi s'aider du tableau de valeurs suivant.

| Valeurs de $h$ | Résultats pour ( $2 + 3h + 4h^2$ ) |
|---|---|
| 0,1 | 2,34 |
| 0,01 | 2,0304 |
| 0,001 | 2,003004 |

**Au final, on peut conclure que** $\lim_{h \to 0} (2+3h+4h^2) = \mathbf{2}$ **.**

**Exemple 3** : On cherche $\lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h}$

Pour le coup, avec l'expression sous cette forme, il est impossible de s'en sortir intuitivement.

Le tableau de valeurs est indispensable .

| Valeurs de $h$ | Résultats pour ( $\frac{6h+h^2}{h}$ ) |
|---|---|
| 0,1 | 6,1 |
| 0,01 | 6,01 |
| 0,001 | 6,001 |

**Au final , on peut conclure que** $\lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \mathbf{6}$ **.**

*En fait, on aurait pu factoriser l'expression* $6h + h^2$ *en* $h(6 + h)$.

*On aurait alors pu écrire* $\frac{6h+h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$ *( en simplifiant par h ) et* $\lim_{h \to 0} (6+h) = 6$.

# Comment calculer un nombre dérivé : la méthode

La définition algébrique du nombre dérivé peut, au départ, un peu effrayé . Il faudra donc rapidement et sérieusement mettre en pratique son calcul un certain nombre de fois pour dépasser ces craintes !!

### Définition

Pour une fonction $f$ , le nombre dérivé de $f$ en $a$ se notera $f\,'(a)$ et se calculera de la façon suivante :

$$f\,'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### Lien avec la courbe et ses tangentes

On se souviendra que le nombre dérivé $f\,'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ , au point d'abscisse $a$ .

Concrètement, en un point de coordonnées ( $a$ ; $f(a)$ ), la tangente à la courbe $C_f$ sera dirigée en ce point par le *vecteur directeur* ( 1 ; $f\,'(a)$ ) car $f\,'(a)$ est le *coefficient directeur* de cette tangente.

### Méthode pratique de calcul

On nous demandera , dans cet exemple, de calculer le nombre dérivé en 3 d'une fonction $f$.

On cherche donc à calculer $f\,'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

- on calculera $f(3+h)$ en remplaçant $x$ par $3+h$
- on calcule ensuite $f(3)$ en remplaçant $x$ par 3
- on calcule enfin $f(3+h) - f(3)$, puis $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.
- il nous reste à déterminer la limite du résultat obtenu lorsque $h$ tend vers 0

Exemple : avec $f(x) = x^2$, on cherche $f'(3)$.

→ on calcule $f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$

→ on calcule $f(3) = 3^2 = 9$

→ on calcule $\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$

On obtient : $\frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$

ne pas barrer $h$ sans réfléchir

on factorise par $h$ et on peut alors simplifier par $h$

On a : $\lim_{h \to 0} (6+h) = 6$ donc $f'(3) = 6$.

## Comment calculer un nombre dérivé : des exemples (1)

**Exemple 1** : avec $f(x) = 6x^2$ , on cherche $f'(1)$

→ on calcule $f(1+h) = 6\times(1+h)^2 = 6\times(1+2h+h^2)$
$= 6 + 12h + 6h^2$

→ on calcule $f(1) = 6\times 1^2 = 6\times 1 = 6$

→ on calcule $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{6+12h+6h^2-6}{h}$

On obtient : $\dfrac{12h+6h^2}{h} = \dfrac{h(12+6h)}{h} = 12+6h$

on respecte toujours les mêmes étapes de calculs

On a : $\lim\limits_{h\to 0}(12+6h) = 12$ donc $f'(1) = 12$.

**Exemple 2** : avec $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ , on cherche $f'(-1)$

→ on calcule $f(-1+h) = 3\times(-1+h)^2 + 2\times(-1+h) + 4$
$= 3\times(1-2h+h^2) + 2\times(-1+h) + 4$
$= 3 - 6h + 3h^2 - 2 + 2h + 4$
$= 3h^2 - 4h + 5$

→ on calcule $f(-1) = 3\times(-1)^2 + 2\times(-1) + 4 = 5$

→ on calcule $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{3h^2-4h+5-5}{h}$

On obtient : $\dfrac{3h^2-4h}{h} = \dfrac{h(3h-4)}{h} = 3h-4$

on respecte toujours les mêmes étapes de calculs

On a : $\lim\limits_{h\to 0}(3h-4) = -4$ donc $f'(-1) = -4$

# Comment calculer un nombre dérivé : des exemples (2)

**Exemple 3 :** avec $f(x) = 3\sqrt{x}$ , on cherche $f'(4)$

→ on calcule $f(4+h) = 3\sqrt{4+h}$

→ on calcule $f(4) = 3 \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$

→ on calcule $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{3\sqrt{4+h} - 6}{h}$

on utilise l'expression conjuguée

On obtient : $\dfrac{(3\sqrt{4+h} - 6)(3\sqrt{4+h} + 6)}{h\,(3\sqrt{4+h} + 6)}$

soit $\dfrac{9(4+h) - 36}{h(3\sqrt{4+h} + 6)} = \dfrac{9h}{h(3\sqrt{4+h} + 6)} = \dfrac{9}{3\sqrt{4+h} + 6}$

on utilise $a^2 - b^2$

on simplifie par $h$

On a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{9}{3\sqrt{4+h} + 6} = 0{,}75$ donc $f'(4) = 0{,}75 = \dfrac{3}{4}$

**Exemple 4 :** avec $f(x) = \dfrac{5}{x}$ , on cherche $f'(2)$

→ on calcule $f(2+h) = \dfrac{5}{2+h}$

→ on calcule $f(2) = \dfrac{5}{2}$

→ on calcule $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{\frac{5}{2+h} - \frac{5}{2}}{h}$

réduction au même dénominateur

On obtient : $\dfrac{\frac{5 \times 2 - 5(2+h)}{(2+h)2}}{h} = \dfrac{10 - 10 - 5h}{2h(2+h)}$

On a $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$

soit $\dfrac{-5h}{2h(2+h)} = \dfrac{-5}{2(2+h)}$

on simplifie par $h$

On a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-5}{2(2+h)} = -\dfrac{5}{4}$ donc $f'(2) = -\dfrac{5}{4}$

# Comment trouver l'équation de la tangente

Il faut juste ne pas oublier que la tangente (en un point d'une courbe) est une *droite* .
Donc l'*équation de la tangente* sera tout simplement une *équation réduite* de la forme $y = ax + b$.

### Formule donnant l'équation de la tangente

En un point d'abscisse $a$ , et donc d'ordonnée $f(a)$ , l' équation de la tangente s'écrira :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

### Méthode pratique

Si on cherche l'équation de la tangente en un point d'abscisse 3, pour une fonction $f$ :

- on calcule $f(3)$
- on calcule le nombre dérivé $f'(3)$ ( voir la méthode sur les fiches précédentes)
- on remplace dans la formule $y = f'(3) \times (x - 3) + f(3)$
- en général, on finit ce travail en développant l'expression mais on peut aussi s'arrêter là.

### Des exemples d'équation de tangente

On va reprendre ici des nombres dérivés que l'on a calculé dans les fiches précédentes.

Avec $f(x) = 6x^2$ , on sait que $f(1) = 6$ et $f'(1) = 12$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 sera :

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

$$\rightarrow y = 12 \times (x - 1) + 6$$

En développant, on obtient : $y = 12x - 6$

Avec $g(x) = 3x^2 + 2x + 4$ , on sait que $g(-1) = 5$ et $g'(-1) = -4$

L'équation de la tangente au point d'abscisse $-1$ sera :

$$y = g'(-1) \times (x - (-1)) + g(-1)$$

$$\rightarrow y = -4 \times (x + 1) + 5$$

En développant, on obtient : $y = -4x + 1$

Avec $h(x) = \frac{5}{x}$ , on sait que $h(2) = \frac{5}{2}$ et $h'(2) = -\frac{5}{4}$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 sera :

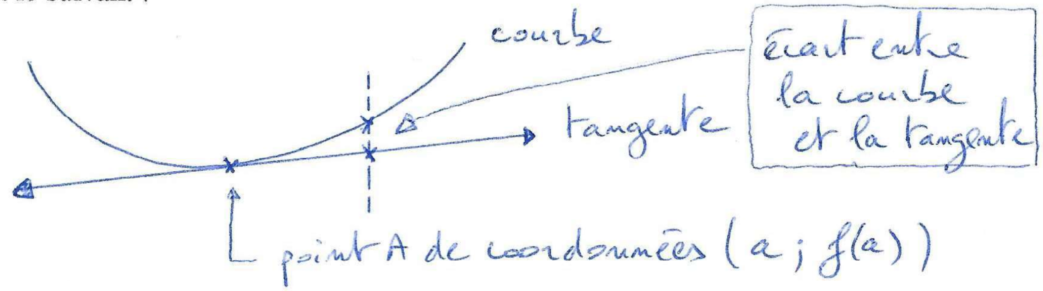
$$y = h'(2) \times (x - 2) + h(2)$$

$$\rightarrow y = -\frac{5}{4} \times (x - 2) + \frac{5}{2}$$

En développant, on obtient : $y = -\frac{5}{4}x + 5$

# Approximation affine d'une fonction avec la tangente

C'est une très belle application utilisant le nombre dérivé et l'équation de la tangente.
Le principe de base est le suivant :




La tangente à une courbe en un point d'abscisse *a* étant une droite qui "colle" au plus près la courbe, on pourra considérer que, dans une zone "***très proche***" de ce point, les deux éléments graphiques (la courbe et la tangente) sont quasiment confondus et que l'écart entre les deux est très petit.
Donc, pour n'importe quelle fonction, et quelle que soit sa complexité, on pourra toujours approcher la valeur de l'image d'un nombre en utilisant l'équation de la tangente. Cela sera d'autant plus facile que le prochain chapitre sur les fonctions dérivées va nous permettre de trouver les nombres dérivés très rapidement pour toute la suite de l'année.
La qualité de l'approximation est meilleure si l'on travaille avec des abscisses plus proche de *a*.

**Exemple**

avec $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on veut calculer l'image de 2,04 soit $f(2{,}04) = \dfrac{5}{2{,}04}$.
Sans calculatrice cela parait très fastidieux. Et en utilisant l'équation de la tangente, on va justement pouvoir donner une très bonne approximation de cette image !!

Avec $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on a déjà vu que $f(2) = \dfrac{5}{2}$ et $f'(2) = -\dfrac{5}{4}$

L'équation de la tangente en 2 s'écrira :

$$y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$$

$$\to \quad y = -\frac{5}{4} \times (x-2) + \frac{5}{2}$$

Inutile de développer ici, et on remplace $x$ par 2,04.

On obtient : $y = -\dfrac{5}{4} \times (2{,}04 - 2) + \dfrac{5}{2}$

$$= -\frac{5}{4} \times 0{,}04 + \frac{5}{2} = -\frac{0{,}2}{4} + \frac{10}{4}$$

$$\to \text{ soit } y = \frac{9{,}8}{4} = 2{,}45 .$$

REMARQUE : à la calculatrice, on a $f(2{,}04) \simeq 2{,}45098$
Avec le résultat 2,45, on a donc obtenu une approximation au millième près.