Comment calculer un produit scalaire dans un repère orthonormé

C'est une formule très facile à retenir et très simple à appliquer MAIS elle a une très forte contrainte :
on ne peut utiliser cette formule qu'en travaillant dans un REPERE ORTHONORME.

La formule

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x'\ ;\ y')$,
on aura, ***dans un repère orthonormé*** : $\vec{u}\ .\ \vec{v} = x \times x' + y \times y'$

Remarques :

- Très souvent, ce sera à nous de calculer *les coordonnées de chaque vecteur.*
- On privilégiera l'écriture des *coordonnées en colonne* plutôt qu'en ligne : c'est plus visuel !

Exemples

Dans un repère orthonormé, on donne les vecteurs $\vec{u}\ (2\ ;\ 5)$ et $\vec{v}\ (4\ ;\ 3)$.
On va calculer $\vec{u}\ .\ \vec{v}$

On a les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$

On a donc : $\vec{u}.\vec{v} = 2\times4 + 5\times3 = 8 + 15 = 23$

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 3) B (4 ; 7) et C (5 ; 9).
On va calculer $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B - x_A = 4-2 = 2\\ y_B - y_A = 7-3 = 4\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}x_C - x_A = 5-2 = 3\\ y_C - y_A = 9-3 = 6\end{matrix}\right.$

On obtient les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right.$

On a donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times3 + 4\times6 = 6 + 24 = 30$

Dans un repère orthonormé, on donne les points A (2 ; 4) B (5 ; 1) R (1 ; - 1) et T (7 ; 5).
On va calculer $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{RT}$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}x_B - x_A = 5-2 = 3\\ y_B - y_A = 1-4 = -3\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{RT}\left|\begin{matrix}x_T - x_R = 7-1 = 6\\ y_T - y_R = 5-(-1) = 6\end{matrix}\right.$

On obtient les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}3\\-3\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{RT}\left|\begin{matrix}6\\6\end{matrix}\right.$

On a donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{RT} = 3\times6 + (-3)\times6 = 18 + (-18) = 0$

On a donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{RT} = 0$, soit $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{RT}$ ou $(AB) \perp (RT)$