La fonction valeur absolue : définition , propriétés

Définition générale

D'un point de vue ***graphique***, sur une droite graduée, la *valeur absolue* d'un nombre x est égale à la *distance* entre le point O (origine) et le point M (d'abscisse x). La valeur absolue de x se note $|x|$.
Conséquence : la valeur absolue d'un nombre est toujours un nombre positif.

Par exemple, on a : $|6| = 6$; $|-3| = 3$; $|3,5| = 3,5$; $|-7,5| = 7,5$

D'un point de vue ***algébrique***, on dira schématiquement que la valeur absolue laisse positif ce qui est déjà positif , et elle rend positif ce qui etait négatif. On retrouve alors souvent la notation suivante :

pour $x \geqslant 0$, on aura $|x| = x$ (rien ne change car x est positif)
pour $x \leqslant 0$, on aura $|x| = -x$ (le signe *moins* (-) permet de rendre le résultat positif car x est négatif)

On a : $|\pi - 3| = \pi - 3$ (car $\pi - 3$ est positif)
$|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ (car $2 - \pi$ est négatif)

Valeur absolue et distance entre deux points

La règle suivante est très importante MAIS elle ne sera valable que si on travaille sur une droite graduée.

Sur une droite graduée, on a : distance AB = $|x_B - x_A|$

$|x-4|$ représente la distance entre un point M d'abscisse x et un point A d'abscisse 4.
$|x+6|$ représente la distance entre un point M d'abscisse x et un point B d'abscisse (-6)
car on écrit $|x+6| = |x-(-6)|$ $\boxed{\text{il faut un } \boxed{-} \text{ pour la distance !}}$

Domaine de définition

C'est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer $|x|$.
Ici , l'ensemble de définition est $]-\infty ; +\infty[$. On peut calculer $|x|$ pour n'importe quel nombre.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $\lvert x \rvert$		$\searrow$		$\nearrow$	

Conséquence des variations

Sur $]-\infty ; 0]$, la fonction valeur absolue est *décroissante*, donc elle ***INVERSE*** l'ordre des inégalités.

On a : $\pi - 8 < \pi - 4$ (<0) (négatif)
Donc on aura : $|\pi - 8| \boxed{>} |\pi - 4|$ $\boxed{\text{inversion}}$

Sur $[0 ; +\infty[$, la fonction valeur absolue est *croissante*, donc elle ***CONSERVE*** l'ordre des inégalités.

On a : $(0<)$ $\pi - 2 < \pi - 1$ (positif)
Donc on aura : $|\pi - 2| \boxed{<} |\pi - 1|$ $\boxed{\text{conservation}}$