La fonction exponentielle : définition , variations , courbe

Domaine de définition

C'est l'ensemble des nombres x pour lesquels on peut calculer e^x ou $exp(x)$.
Ici , l'ensemble de définition sera $]-\infty\,;+\infty[$, c'est à dire que l'on peut calculer e^x ou $exp(x)$ pour n'importe quelle valeur de x .

Le nombre $e^{2,5}$ existe et on a $e^{2,5} \simeq 12,1$.
Le nombre $e^{-1,2}$ existe et on a $e^{-1,2} \simeq 0,3$.

Tableau de variations, valeurs à connaitre et les limites

Connaitre une fonction, c'est ***connaitre par coeur*** son tableau de variations, avec quelques valeurs caractéristiques, et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

Conséquences immédiates

→ on a $e^0 = 1$ et $e^1 = e \simeq 2,7$
↳ on parle bien du nombre "e"

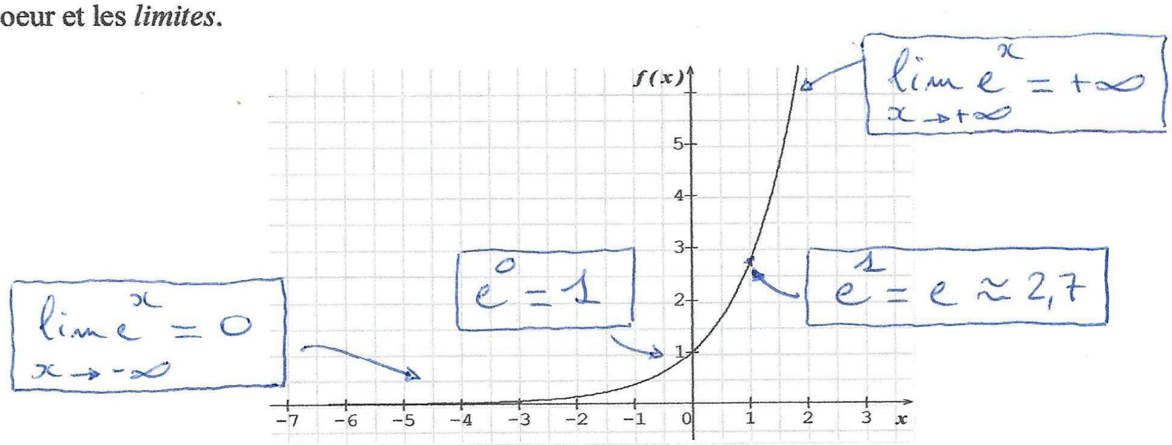
→ on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

→ la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

→ pour tout x, on aura $e^x > 0$ (positif).
On dira "qu'une exponentielle est toujours positive".

La courbe représentative

Elle doit nous aider à bien mémoriser les *variations* de la fonction exponentielle , les *valeurs* à connaitre par coeur et les *limites*.



Comment calculer avec la fonction exponentielle : les propriétés

Les propriétés

On pourra se souvenir que les propriétés de calculs de la *fonction exponentielle* sont les mêmes que les propriétés de calculs des *puissances* (comme si e^x correspondait à " *e puissance x* ").

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad \text{et} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(e^x)^n = e^{nx} \quad \text{et} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Quelques exemples de calculs

Il faudra s'entrainer à être *parfaitement à l'aise* avec tous ces calculs algébriques utilisant e^x.

$$e^3 \times e^{-4} \times e^2 = e^{3+(-4)+2} = e^1 = e$$

$$(e^x)^2 \times e^3 = e^{2x} \times e^3 = e^{2x+3}$$

$$e^{2x} - e^x = (e^x)^2 - e^x = e^x(e^x - 1) \quad \text{(en factorisant)}$$

$$\frac{e^{4x}\, e^{2x+1}}{e^{5x}} = \frac{e^{4x+2x+1}}{e^{5x}} = \frac{e^{6x+1}}{e^{5x}}$$

$\rightarrow$ on obtient : $e^{6x+1-5x} = e^{x+1}$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x \times e^x - 1}{e^x}}{\frac{e^x \times e^x + 1}{e^x}}$$

$\rightarrow$ on obtient : $\dfrac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

(astuce : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \times \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$)

Comment résoudre une équation avec la fonction exponentielle

Cette année, nous ne pourrons résoudre que certains types d'équations.
Mais c'est une bonne base de travail, avant l'année prochaine, et la fonction *logarithme népérien* qui nous permettra de résoudre l'ensemble des équations proposées avec la fonction *exponentielle*.

Cas n°1 : avec une exponentielle de chaque côté

Propriété

On a : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ (équivalent à)

Exemple : on résout l'équation $e^{2x+1} = e^7$

On a : $e^{2x+1} = e^7 \Leftrightarrow 2x + 1 = 7$

On obtient : $2x = 6 \rightarrow x = 3$.

Cas n°2 : avec les nombres 1 ou e comme résultats à obtenir

Propriétés (il faudra utiliser le fait que $e^0 = 1$ et $e^1 = e$)

On a : $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0$ soit $x = 0$

On a : $e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1$ soit $x = 1$

Exemple : on résout l'équation $e^{5x-3} = 1$

On a : $e^{5x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{5x-3} = e^0 \Leftrightarrow 5x - 3 = 0$

On obtient : $5x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{5} = 0,6$

Exemple : on résout l'équation $e^{-4x+1} - e = 0$

On transforme $e^{-4x+1} - e = 0$ en $e^{-4x+1} = e$

On a alors : $e^{-4x+1} = e \Leftrightarrow e^{-4x+1} = e^1 \Leftrightarrow -4x + 1 = 1$

On obtient : $-4x + 1 = 1$

soit $-4x = 0 \rightarrow x = 0$

Comment résoudre une inéquation avec la fonction exponentielle

Les méthodes pour résoudre des inéquations vont complétement ressembler aux méthodes vues sur la *fiche précédente des équations*. En effet, il faudra se souvenir que la fonction *exponentielle* est ***croissante*** sur l'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$, et donc la fonction *exponentielle* ***conserve*** l'ordre des inégalités.
Les propriétés vont être vues ici avec le signe $<$. *Elles seraient bien sûr similaires avec* $>$, $\geqslant$ *ou* $\leqslant$.

Cas n°1 : avec une exponentielle de chaque côté

Propriété

Om a : $e^x < e^y \overset{\text{(équivalent à)}}{\Longleftrightarrow} x < y$

Exemple : on résout l'équation $e^{2x+3} < e^4$

Om a : $e^{2x+3} < e^4 \Leftrightarrow 2x+3 < 4$

Om obtient : $2x < 1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$

L'ensemble solution est $S =]-\infty\,; \frac{1}{2}[$

Cas n°2 : avec les nombres 1 ou e comme résultats à obtenir

Propriétés (il faudra utiliser le fait que $e^0 = 1$ et $e^1 = e$)

Om a : $e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0$ soit $x < 0$

Om a : $e^x < e \Leftrightarrow e^x < e^1$ soit $x < 1$

Exemple : on résout l'équation $e^{3x-2} < 1$

Om a : $e^{3x-2} < 1 \Leftrightarrow e^{3x-2} < e^0 \Leftrightarrow 3x-2 < 0$

Om obtient : $3x < 2 \rightarrow x < \frac{2}{3}$

L'ensemble solution est $S =]-\infty\,; \frac{2}{3}[$

Exemple : on résout l'équation $e^{4x-1} - e < 0$

Om transforme $e^{4x-1} - e < 0$ en $e^{4x-1} < e$

Om a alors : $e^{4x-1} < e \Leftrightarrow e^{4x-1} < e^1 \Leftrightarrow 4x-1 < 1$

Om obtient : $4x < 2 \rightarrow x < \frac{2}{4} \rightarrow x < \frac{1}{2}$

L'ensemble solution est $S =]-\infty\,; \frac{1}{2}[$

Comment étudier le signe d'une expression avec la fonction exponentielle

Un petit rappel

On sait que l'expression e^x est *strictement positive* pour tout x (on a $e^x > 0$, pour tout x).
Cela nous amène à mémoriser cette petite phrase : ***une exponentielle est toujours positive.***

La méthode

On a déjà appris à étudier le signe d'expressions de *fonctions affines* ou de *trinômes du second degré*.
Il faut alors "démythifier" la *fonction exponentielle* qui ne va pas changer les méthodes générales.
On sera donc amené à effectuer des factorisations, à résoudre des équations , des inéquations ...etc...

Les exemples de base

On étudie le signe de $-4e^{5x-3}$

Pour tout x, on a : $e^{5x-3} > 0$ (positif)

Donc on a, pour tout x, $-4e^{5x-3} < 0$

L'expression $-4e^{5x-3}$ est donc négative sur $\mathbb{R}$.

On étudie le signe de $e^{-6x-5}+2$

Pour tout x, on a : $e^{-6x-5} > 0$ (positif)

Donc, en ajoutant 2, on a : $e^{-6x-5}+2 > 0$

L'expression $e^{-6x-5}+2$ est donc positive sur $\mathbb{R}$.

On étudie le signe de $e^{2x-5}-1$ $\rightarrow$ **on va obtenir un tableau de signes essentiel pour cette année !**

$\rightarrow$ on résout $e^{2x-5}-1=0$ soit $e^{2x-5}=1$ $(=e^0)$

On obtient : $2x-5=0$ $\rightarrow$ $x=\frac{5}{2}$

$\rightarrow$ on résout $e^{2x-5}-1<0$ soit $e^{2x-5}<1$

On obtient : $2x-5<0$ $\rightarrow$ $x<\frac{5}{2}$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signes de $e^{2x-5}-1$		$-$	0	$+$	

Etude de signe d'expressions avec la fonction exponentielle
Applications

Les exemples que l'on va voir sur cette fiche constitue chacun un petit exercice en soit.
Il n'y aura pas de réponses toutes faites , de résultat de cours à appliquer directement par coeur ....
Pour chacun, il faudra appliquer les méthodes de calculs apprises et bien conclure pour les signes.

Application 1 : On étudie le signe de $e^{x} - e^{2x+3}$

On résout : $e^{x} - e^{2x+3} = 0 \rightarrow e^{x} = e^{2x+3}$

On obtient : $x = 2x+3 \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = -3$

On résout : $e^{x} - e^{2x+3} < 0 \rightarrow e^{x} < e^{2x+3}$

On obtient : $x < 2x+3 \rightarrow -x < 3 \rightarrow x > -3$

⚠

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signes de $e^{x} - e^{2x+3}$		+	0	−	

Application 2 : On étudie le signe de $e^{-5x+2}(4x-8)$

Pour tout x, on aura $e^{-5x+2} > 0$ (positif).

Donc le signe de l'expression dépend du signe de $4x-8$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signes de e^{-5x+2}		+		+	
Signes de $4x-8$		−	0	+	
Signes de $e^{-5x+2}(4x-8)$		−	0	+	

Application 3 : On étudie le signe de $xe^{-x} - x$

On commence par factoriser : $xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$

On résout : $e^{-x} - 1 = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0$

On résout : $e^{-x} - 1 < 0 \rightarrow e^{-x} < 1 \rightarrow -x < 0 \rightarrow x > 0$

⚠

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signes de x		−	0	+	
Signes de $e^{-x} - 1$		+	0	−	
Signes de $xe^{-x} - x$		−	0	−	

Dérivée et fonction exponentielle

La dérivée de la fonction exponentielle

La particularité de la fonction exponentielle est que *sa fonction dérivée est égale à elle-même* !

Pour tout nombre réel x, on a : $(e^x)' = e^x$

La fonction exponentielle est donc bien dérivable sur $]-\infty ; +\infty[$.

Exemple : avec la fonction définie par $f(x) = 4\ e^x + 7x$

$\rightarrow$ on obtient $f'(x) = 4e^x + 7$

Application : avec la fonction définie par $g(x) = 3x^2\ e^x$

On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 6x$

$v(x) = e^x \rightarrow v'(x) = e^x$

On obtient : $g'(x) = \underbrace{6x}_{u'} \times \underbrace{e^x}_{v} + \underbrace{3x^2}_{u} \times \underbrace{e^x}_{v'}$

soit $g'(x) = e^x(6x + 3x^2)$

$\hookrightarrow$ on factorise par e^x

Fonction composée et dérivation

Pour avoir une fonction composée, il faut ici prendre l'exponentielle d'une autre fonction que x *tout seul*.
La formule générale et les exemples qui suivent sont à " *photographier mentalement* ".

Pour toute fonction u dérivable, on a $(e^u)' = u' \times e^u$

Des exemples de dérivée avec une fonction composée

avec $f(x) = e^{3x+1}$, on a $f'(x) = \underbrace{3}_{u'} \times e^{3x+1}$

avec $g(x) = e^{-x}$, on a $g'(x) = \underbrace{-1}_{u'} \times e^{-x} = -e^{-x}$

avec $h(x) = 5e^{-2x+3}$, on a $h'(x) = 5 \times \underbrace{(-2)}_{u'} e^{-2x+3} = -10e^{-2x+3}$

avec $i(x) = 4e^{x^2}$, on a $i'(x) = 4 \times \underbrace{2x}_{u'} e^{x^2} = 8x e^{x^2}$

Utilisation des dérivées : étude des variations d'une fonction avec exponentielle (1)

Les résultats généraux vus cette année sur le lien entre le tableau de signes de la fonction dérivée f' et le tableau de variations de la fonction f restent parfaitement valables.
Encore une fois, l'introduction de la fonction *exponentielle* ne change aucune méthode. Elle demandera juste un peu de pratique au niveau des calculs.

Exemple : étude des variations de $f(x) = 4\ e^{-3x+6}$

On applique le résultat sur la dérivation d'une fonction composée.

On obtient : $f'(x) = 4 \times \underbrace{(-3)}_{u'} e^{-3x+6} = -12\, e^{-3x+6}$

une exponentielle est toujours positive

On obtient donc :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signes de - 12	$-$
Signes de e^{-3x+6}	$+$
Signes de la dérivée f'	$-$
Variations de la fonction f	$\searrow$

Exemple : étude des variations d'une fonction "produit" définie par $g(x) = x\, e^{x}$

On applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \rightarrow v'(x) = e^x$

On obtient : $g'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{e^x}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{e^x}_{v'} = e^x(x+1)$

on factorise par e^x

On obtient donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signes de e^x	$+$	|	$+$
Signes de $x + 1$	$-$	0	$+$
Signes de la dérivée g'	$-$	0	$+$
Variations de la fonction g	$\searrow$		$\nearrow$

Utilisation des dérivées : étude des variations d'une fonction avec exponentielle (2)

Les résultats généraux vus cette année sur le lien entre le tableau de signes de la fonction dérivée $f\,'$ et le tableau de variations de la fonction f restent parfaitement valables.
Encore une fois, l'introduction de la fonction *exponentielle* ne change aucune méthode. Elle demandera juste un peu de pratique au niveau des calculs.

Exemple : étude des variations d'une fonction "quotient"

On considère $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

(la fonction h est bien définie sur $]0;+\infty[$)

→ on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = e^x \rightarrow u'(x) = e^x$

$v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

On obtient : $h'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$

→ on factorise le numérateur par e^x.

On a donc $h'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

On obtient donc :

x	0		1		$+\infty$
Signes de e^x	‖	$+$	|	$+$	
Signes de $x - 1$	‖	$-$	0	$+$	
Signes de x^2	‖	$+$	|	$+$	
Signes de la dérivée h'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de la fonction h	‖	↘	|	↗	