Comment montrer que deux droites sont perpendiculaires

C'est un résultat essentiel à retenir, en prévision de l'année de Terminale. Il utilise une propriété du produit scalaire qui nous servira encore l'an prochain avec la géométrie dans l'espace.

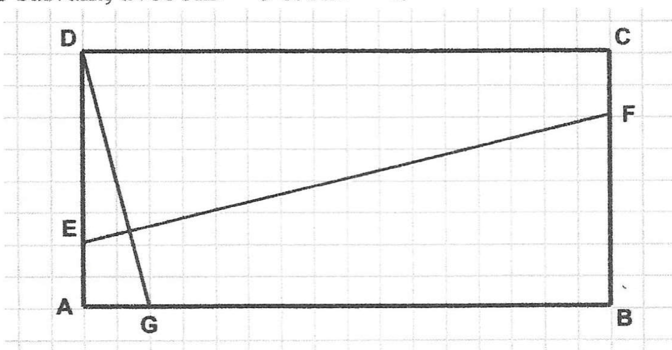
La propriété

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$

Conséquence :
Pour montrer que deux droites (d) et (d') sont *perpendiculaires*, on utilisera des vecteurs directeurs respectifs de chacune des droites et on montrera que le *produit scalaire* des deux vecteurs est nul.

Exemple

On considère le rectangle suivant, avec AB = 8 et AD = 4.



Les points E , F et G correspondent à : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

On va montrer que les droites (EF) et (DG) sont *perpendiculaires*.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE})$

Dans ce repère, on a : $E\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $F\left|\begin{matrix}8\\3\end{matrix}\right.$ $D\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$ $G\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

On obtient : $\overrightarrow{EF}\left|\begin{matrix}8-0=8\\3-1=2\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{DG}\left|\begin{matrix}1-0=1\\0-4=-4\end{matrix}\right.$

On calcule donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG}$ avec $\overrightarrow{EF}\left|\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{DG}\left|\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right.$

On a : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG} = 8\times 1 + 2\times(-4) = 8+(-8) = 0$

On a donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{DG} = 0$, soit $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$.

<u>Conclusion</u> : les droites (EF) et (DG) sont perpendiculaires.