

Comment comparer algébriquement deux fonctions

Méthode de base

On considère déjà savoir comparer *graphiquement* deux fonctions (*petit rappel*: une fonction f était *inférieure* à une fonction g , sur un intervalle, lorsque la courbe de f était *en dessous* de la courbe de g . On va maintenant apprendre à comparer *algébriquement* deux fonctions, c'est à dire par le calcul !!

Pour *comparer* deux fonctions définies par $f(x)$ et $g(x)$:

- on *calcule* $f(x) - g(x)$, en simplifiant autant que possible l'expression.
- on *réalise le tableau de signes* du résultat (*revoir les signes des fonctions affines et des trinômes !*).
- les intervalles pour lesquels on obtient un " - " dans le tableau signifient que $f(x) - g(x)$ est négatif sur cet intervalle, et donc que $f(x) \leq g(x)$.
- les intervalles pour lesquels on obtient un " + " dans le tableau signifient que $f(x) - g(x)$ est positif sur cet intervalle, et donc que $f(x) \geq g(x)$.

Un exemple basique

On va comparer sur $] -\infty ; +\infty [$ les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -3x + 4$

$$\text{On calcule } f(x) - g(x) = x^2 - (-3x + 4) = x^2 + 3x - 4$$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
Signes de $x^2 + 3x - 4$	+	0	-	0	+

Conclusion

$$\text{On a : } f(x) \geq g(x) \text{ sur }]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ sur } [-4; 1]$$

Un exemple plus technique

On va comparer sur $] -\infty ; 1 [\cup] 1 ; +\infty [$ les fonctions définies par $f(x) = x + 5$ et $g(x) = \frac{7}{x-1}$

$$\text{On calcule } f(x) - g(x) = x + 5 - \frac{7}{x-1} = \frac{(x+5)(x-1) - 7}{x-1}$$

$$\rightarrow \text{on obtient } f(x) - g(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x-1}$$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-6	1	2	$+\infty$		
Signes de $x^2 + 4x - 12$	+	0	-	-	0	+	
Signes de $x - 1$	-	-	0	+	+	+	
Signes de $f(x) - g(x)$	-	0	+		-	0	+

Conclusion

$$\text{On a : } f(x) \geq g(x) \text{ sur } [-6; 1[\cup [2; +\infty[$$

$$f(x) \leq g(x) \text{ sur }]-\infty; -6] \cup]1; 2]$$

↑ valeur interdite