Comment calculer un produit scalaire avec le cosinus

C'est en général la première formule vue en classe et elle correspond globalement à une définition du produit scalaire. Cette formule nécessite de connaitre les longueurs des deux vecteurs et l'angle qu'ils forment entre eux.

La formule

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on connait l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, on aura : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
Avec deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on connait l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on aura : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lVert \overrightarrow{AB} \rVert \times \lVert \overrightarrow{AC} \rVert \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Exemples

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\lVert \vec{u} \rVert = 4$; $\lVert \vec{v} \rVert = 5$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ (soit 60°)

On a : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10$

On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$

Avec deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $\lVert \overrightarrow{AB} \rVert = 3$; $\lVert \overrightarrow{AC} \rVert = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ (soit 45°)

On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (on garde la valeur exacte)

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lVert \overrightarrow{AB} \rVert \times \lVert \overrightarrow{AC} \rVert \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}$

Avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\lVert \vec{u} \rVert = 2$; $\lVert \vec{v} \rVert = 6$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ (soit 90°)

On a : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 6 \times 0 = 0$

On retrouve donc la règle suivante :

si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Remarque : si on a un vecteur nul (par exemple, $\vec{u} = \vec{0}$), alors on retrouve bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ car on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert \vec{u} \rVert \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \times \lVert \vec{v} \rVert \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$