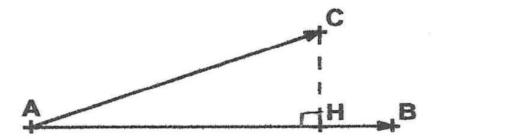
Comment calculer un produit scalaire avec une projection orthogonale

C'est souvent la méthode la moins bien maitrisée, mais ne partons pas perdant d'avance.
Il suffira, en fait, de réaliser la projection orthogonale d'un vecteur sur le deuxième vecteur (et donc on cherchera des angles droits sur la figure).

Le principe de base

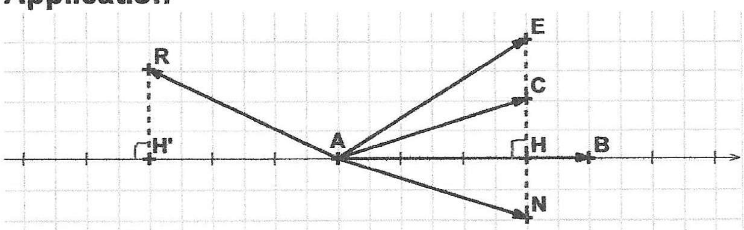


Le point C se projette orthogonalement (avec un angle droit) sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$: on obtient le point H.

On a alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

Avec ce point H, le produit scalaire devient le produit de deux longueurs

Application



Les points E, C et N se projettent tous sur H. Donc les produits scalaires sont tous égaux.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

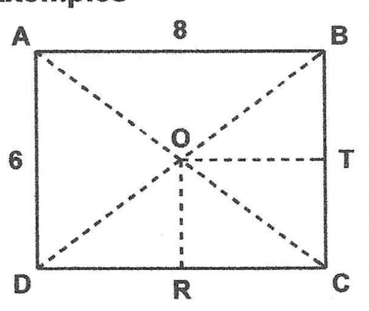
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR} = \boxed{-} AB \times AH' = \boxed{-} 4 \times 3 = \boxed{-} 12$

vecteurs opposés → résultat négatif

Exemples



On a : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = DC \times DC = 8 \times 8 = 64$

le point B se projette sur C

On a : $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO} = CB \times CT = 6 \times 3 = 18$

le point O se projette sur T

On a : $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} = DC \times DR = 8 \times 4 = 32$

le point O se projette sur R

On a : $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AO} = - CB \times BT = - 6 \times 3 = - 18$

ici, on projette deux points : O et A se projettent sur T et B
De plus, les vecteurs sont opposés → produit scalaire négatif