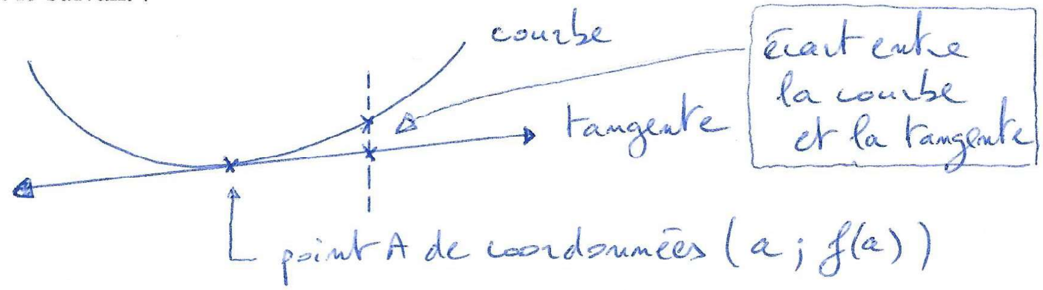
Approximation affine d'une fonction avec la tangente

C'est une très belle application utilisant le nombre dérivé et l'équation de la tangente.
Le principe de base est le suivant :



La tangente à une courbe en un point d'abscisse a étant une droite qui "colle" au plus près la courbe, on pourra considérer que, dans une zone "***très proche***" de ce point, les deux éléments graphiques (la courbe et la tangente) sont quasiment confondus et que l'écart entre les deux est très petit.
Donc, pour n'importe quelle fonction, et quelle que soit sa complexité, on pourra toujours approcher la valeur de l'image d'un nombre en utilisant l'équation de la tangente. Cela sera d'autant plus facile que le prochain chapitre sur les fonctions dérivées va nous permettre de trouver les nombres dérivés très rapidement pour toute la suite de l'année.
La qualité de l'approximation est meilleure si l'on travaille avec des abscisses plus proche de a.

Exemple

avec $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on veut calculer l'image de 2,04 soit $f(2{,}04) = \dfrac{5}{2{,}04}$.
Sans calculatrice cela parait très fastidieux. Et en utilisant l'équation de la tangente, on va justement pouvoir donner une très bonne approximation de cette image !!

Avec $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on a déjà vu que $f(2) = \dfrac{5}{2}$ et $f'(2) = -\dfrac{5}{4}$

L'équation de la tangente en 2 s'écrira :

$$y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$$

$$\rightarrow \quad y = -\frac{5}{4} \times (x-2) + \frac{5}{2}$$

Inutile de développer ici, et on remplace x par 2,04.

On obtient : $y = -\dfrac{5}{4} \times (2{,}04 - 2) + \dfrac{5}{2}$

$$= -\frac{5}{4} \times 0{,}04 + \frac{5}{2} = -\frac{0{,}2}{4} + \frac{10}{4}$$

$$\rightarrow \text{ soit } y = \frac{9{,}8}{4} = 2{,}45 .$$

REMARQUE : à la calculatrice, on a $f(2{,}04) \simeq 2{,}45098$
Avec le résultat 2,45 , on a donc obtenu une approximation au millième près.