Application du produit scalaire : recherche d'un ensemble de points

La problématique à résoudre va être la suivante :

On cherche à déterminer à quel ensemble (droite, cercle ...) correspondent les points M vérifiant une égalité du type $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (où k est un nombre réel quelconque) .

Cas 1 : on cherche les points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ signifie $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

→ on réactive nos souvenirs de collège sur le cercle circonscrit et on conclut que l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB].

Cas 2 : on cherche les points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (avec $k \neq 0$)

Pour trouver cet ensemble de point, on va devoir transformer l'écriture $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et c'est avec l'écriture transformée que l'on pourra conclure.

Transformation de l'écriture $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

En considèrant le point I milieu du segment [AB] , on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

Démonstration

On a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

or $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA}$

$= \overrightarrow{MI} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}}_{\text{vecteur nul}}) = \vec{0}$

et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} = -\frac{1}{4} AB^2$ ← vecteurs colinéaires et opposés

Om obtient bien : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

Application

Pour résoudre $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$ (avec par exemple $AB = 8$)

on résout $MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 = 3$ (I milieu de [AB])

soit $MI^2 - \frac{1}{4} \times 8^2 = 3$

On obtient : $MI^2 = 3 + \frac{1}{4} \times 8^2 = 19 \rightarrow MI = \sqrt{19}$

On obtient le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{19}$