Application du produit scalaire : la propriété d'Al-Kashi

C'est une très belle application du produit scalaire qui va nous permettre de généraliser la propriété de Pythagore. On pourra alors calculer une longueur dans un triangle, même s'il n'est pas rectangle.
Sur cette fiche, la *démonstration* et la *formule* obtenue sont toutes les deux importantes à retenir.

La formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC quelconque, on a l'égalité suivante :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Démonstration :

On a : $\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ propriété de Chasles

Donc $BC^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$\rightarrow BC^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$

$\boxed{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$

On obtient : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

soit $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\underbrace{AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}_{\text{c'est } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$

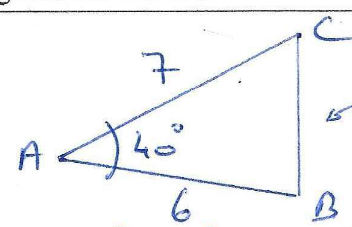
$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = BA^2 = AB^2}$

Utilisation de cette formule d'Al-Kashi

Dans un triangle quelconque, si on connait la longueur de deux côtés du triangle et la valeur de l'angle qu'ils forment, alors on pourra calculer la longueur du troisième côté (qui est opposé à l'angle donné).

Exemple
Soit un triangle ABC tel que AB = 6 , AC = 7 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\widehat{BAC}) = 40°$.
On veut calculer la longueur du côté BC.

Croquis



on cherche BC

On applique la formule d'Al-Kashi

$\rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos(40°)$

On en déduit BC^2, et ainsi $BC \simeq 4{,}54$