Les trinômes du second degré
Définition , allure de la courbe

Définition (avec la forme développée)

Un trinôme du second degré s'écrira sous la forme (*développée*) suivante : $\boldsymbol{a x^2 + b x + c}$
Les coefficients a , b et c sont des nombres réels. Le coefficient a ne peut pas être égal à 0 (car il n'y aurait plus plus de second degré). Par contre, b et c peuvent être nuls.
→ on prendra l'habitude de bien faire apparaitre, sur sa feuille, les valeurs de a , b et c !

$4x^2 - 3x + 2$ est un trinôme → avec $a = 4$; $b = -3$; $c = 2$

$6 + x^2 - x$ est un trinôme → avec $a = 1$; $b = -1$; $c = 6$

$8x^2 - 3$ est un trinôme → avec $a = 8$; $b = 0$; $c = -3$

$7x^2 - 5x$ est un trinôme → avec $a = 7$; $b = -5$; $c = 0$

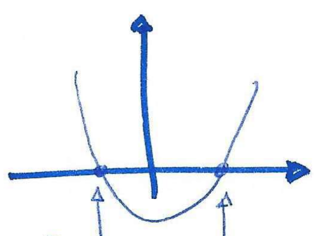
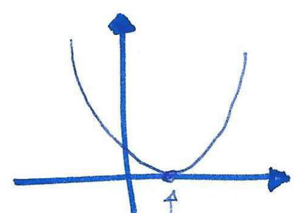
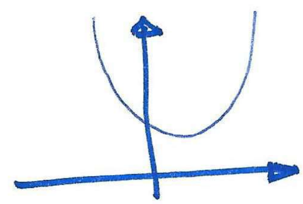
$4x - 1$ n'est pas un trinôme (car ici $a = 0$!)

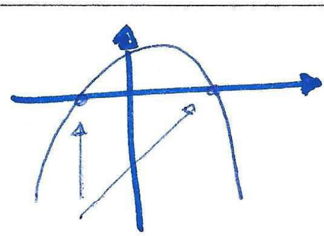
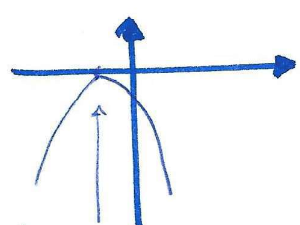
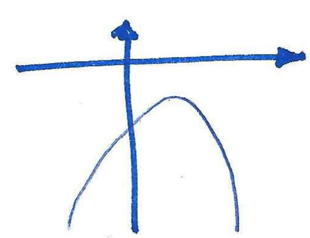
Allure de la courbe

La courbe représentative d'un trinôme du second degré est toujours une *parabole*.
On sait que le signe du coefficient a conditionne l'allure de la courbe :

- si le coefficient a est *positif*, alors la parabole est en "∪" (*aide mémoire* : c'est comme un "*smiley*" qui sourit car il "aime bien" les nombres positifs).
- si le coefficient a est *négatif*, alors la parabole sera en "∩".

De plus, suivant le nombre de *racines* du trinôme, **c'est à dire** le *nombre de solutions* de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$, **c'est à dire** le nombre de fois où la *courbe coupe l'axe des abscisses* (**c'est à dire** "passe par 0"), on se retrouvera avec un des six cas suivants.

Les trois cas possibles avec le coefficient "a" positif		
 2 racines	 1 racine	 0 racine

Les trois cas possibles avec le coefficient "a" négatif		
 2 racines	 1 racine	 0 racine

Comment obtenir la forme canonique d'un trinôme

La forme développée d'un trinôme

Elle s'écrit avec les coefficients a, b et c sous la forme $ax^2 + bx + c$

L'écriture $7x^2 + 4x + 1$ est la forme développée du trinôme → avec $a = 7$; $b = 4$; $c = 1$

La forme canonique d'un trinôme

A partir de la forme *développée* d'un trinôme, on peut trouver sa forme *canonique*.
Cette forme *canonique* s'écrira sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- le coefficient a est le même que celui de la forme *développée*.
- le nombre α ("alpha") se calcule facilement : il est égal à $\dfrac{-b}{2a}$.
- le nombre β ("bêta") se calcule également: c'est l'image du nombre α par la fonction trinôme (on remplace x par la valeur de α),

<u>Exemple</u> : avec le trinôme $3x^2 - 24x + 63$

→ avec $a = 3$; $b = -24$; $c = 63$

On calcule : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-24)}{2 \times 3} = \dfrac{24}{6} = 4$

On calcule : $\beta = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 63 = 3 \times 16 - 96 + 63 = 15$

on remplace x par 4

On obtient la forme canonique : $3(x-4)^2 + 15$.

Forme canonique et sommet de la parabole

Les nombres α et β de la forme canonique correspondent aux coordonnées du sommet de la parabole.
Le nombre α correspond à l'abscisse de ce sommet.
Le nombre β correspond à son ordonnée (c'est donc le *maximum* si la courbe est du type "∩" ou le *minimum* du trinome si la courbe est du type "∪").

- Avec $2(x-1)^2 - 3$, on aura un minimum (courbe en U) de coordonnées $(\underset{\alpha}{1} ; \underset{\beta}{-3})$
- Avec $-2(x+4)^2 + 6 = -2(x-(-4))^2 + 6$, on aura un maximum (courbe en ∩) de coordonnées $(\underset{\alpha}{-4} ; \underset{\beta}{6})$

Comment résoudre une équation du second degré
On utilise le discriminant

Nous savons, pour le moment, résoudre des équations du premier degré (par exemple, $4x + 17 = 42$).
Pour résoudre une *équation du second degré* (par exemple, $3x^2 - 7x + 2 = 0$), nous allons voir ici la méthode générale, que l'on pourra appliquer dans tous les cas de trinômes.
Parfois, dans certains cas particuliers, une autre méthode sera possible. Il sera intéressant de la voir, de la comprendre, en se souvenant que la méthode générale fonctionnerait quand même !

Méthode générale, avec le discriminant Δ (delta)

Le *discriminant* est un outil de calcul noté Δ .
→ pour un trinôme noté $ax^2 + bx + c$, on a le discriminant $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Le signe de ce discriminant Δ va nous donner le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et la valeur de ces solutions (appelées aussi les *racines* du trinôme).

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule donc son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- *si ce discriminant est strictement positif* (**$\Delta > 0$**), alors l'équation possède *2 solutions distinctes*.

  On aura $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{(\Delta)}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{(\Delta)}}{2a}$.

- *si ce discriminant est nul* (**$\Delta = 0$**), alors l'équation possède *une seule solution.*

  On aura $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

- *si ce discriminant est strictement négatif* (**$\Delta < 0$**), alors l'équation n'a *aucune solutions réelle.*

Exemple fondamental

On veut résoudre l'équation $3x^2 - 7x + 2 = 0$

↳ avec $a = 3$; $b = -7$; $c = 2$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2$
$= 49 - 24 = 25 > 0$

Le discriminant Δ est positif,
il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\times 3} = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\times 3} = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Comment résoudre une équation du second degré
Quelques exemples (1)

Il est, bien sûr, impossible d'être exhaustif et de voir tous les cas possibles.
Nous allons juste ici voir quelques exemples, qui doivent pouvoir servir de référence pour toute l'année.

Exemple 1 : *on veut résoudre l'équation* $x^2 - 4x - 21 = 0$ $\rightarrow a = 1 ; b = -4 ; c = -21$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 100 > 0$

Le discriminant est positif $\rightarrow$ il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Exemple 2 : *on veut résoudre l'équation* $-4x^2 + 8x = 0$ $\rightarrow a = -4 ; b = 8 ; c = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-4) \times 0 = 64 > 0$

Le discriminant est positif $\rightarrow$ il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{64}}{2 \times (-4)} = \frac{-8 - 8}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{64}}{2 \times (-4)} = \frac{-8 + 8}{-8} = \frac{0}{-8} = 0$$

Attention, cette équation $-4x^2 + 8x = 0$ *peut se résoudre aussi en effectuant une factorisation*

On résout $-4x^2 + 8x = 0$

$\rightarrow x(-4x + 8) = 0$ (en factorisant par x)

C'est une équation produit nul

$\rightarrow$ un produit de facteurs est nul si au moins l'un de ses facteurs est nul.

On obtient : $x = 0$ $\boxed{\text{OU}}$ $-4x + 8 = 0$

$-4x = -8$

$x = \frac{-8}{-4} = 2$

Comment résoudre une équations du second degré
Quelques exemples (2)

Il est, bien sûr, impossible d'être exhaustif et de voir tous les cas possibles.
Nous allons juste ici voir quelques exemples, qui doivent pouvoir servir de référence pour toute l'année.
Cette fiche est le complément de la fiche précedente dans laquelle deux exemples ont été déjà traités.

Exemple 3 : *on veut résoudre l'équation* $2x^2 + 4x + 2 = 0$ $\rightarrow a = 2 \; ; b = 4 \; ; c = 2$

on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$

Le discriminant est donc égal à 0

$\rightarrow$ il y a donc une seule racine.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

Exemple 4 : *on veut résoudre l'équation* $x^2 - 3x + 5 = 0$ $\rightarrow a = 1 \; ; b = -3 \; ; c = 5$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -11 < 0$

Le discriminant est donc négatif

$\rightarrow$ il n'y a pas de racine.

L'équation $x^2 - 3x + 5 = 0$ n'a pas de solution.

Exemple 5 : *on veut résoudre l'équation* $2x^2 - 18 = 0$ $\rightarrow a = 2 \; ; b = 0 \; ; c = -18$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 2 \times (-18) = 144 > 0$

Le discriminant est positif $\rightarrow$ il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 - \sqrt{144}}{2 \times 2} = \frac{-0 - 12}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 + \sqrt{144}}{2 \times 2} = \frac{-0 + 12}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Attention, cette équation $2x^2 - 18 = 0$ *peut se résoudre autrement.*

on résout $2x^2 - 18 = 0$

$\rightarrow 2x^2 = 18$

$\rightarrow x^2 = \frac{18}{2} = 9$ soit $x = 3$ ou $x = -3$

Comment obtenir la forme factorisée d'un trinôme

En plus de la forme *développée* d'un trinôme, et de sa forme *canonique*, on peut également obtenir une troisième forme qui présentera un certain intérêt. C'est la forme *factorisée* !
Cette forme factorisée va utiliser les *racines* du trinôme. Donc, en fonction du signe du discriminant Δ et, donc, du nombre de racines, on n'obtiendra pas du tout la même chose !!

Formules

On veut factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$. On calcule donc son discriminant $\Delta = b^2 - 4\,ac$.

- si ce discriminant est strictement positif ($\Delta > 0$), alors il y a 2 *racines notées* x_1 et x_2 .
  L'expression $ax^2 + bx + c$ se factorise sous la forme $a\,(x - x_1)(x - x_2)$.
- si ce discriminant est nul ($\Delta = 0$), alors il y a une *racine notée* x_0 .
  L'expression $ax^2 + bx + c$ se factorise sous la forme $a\,(x - x_0)^2$.
- si ce discriminant est négatif ($\Delta < 0$), alors il n'y a pas de *racine*.
  L'expression $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas !

Exemple 1 : *on veut factoriser le trinôme* $x^2 - 4x - 21$ $\rightarrow a = 1 \,;\, b = -4 \,;\, c = -21$

On a vu que ce trinôme avait deux racines : -3 et 7.
La forme factorisée s'écrit : $1 \times (x - (-3))(x - 7)$
soit $(x + 3)(x - 7)$

Exemple 2 : *on veut factoriser le trinôme* $2x^2 + 4x + 2$ $\rightarrow a = 2 \,;\, b = 4 \,;\, c = 2$

On a vu que ce trinôme avait une seule racine : -1.
La forme factorisée s'écrit : $2 \times (x - (-1))^2$
soit $2(x + 1)^2$

Exemple 3 : *on veut factoriser le trinôme* $x^2 - 3x + 5$ $\rightarrow a = 1 \,;\, b = -3 \,;\, c = 5$

On a vu que ce trinôme n'avait pas de racine.
Donc, ce trinôme n'a pas de forme factorisée.

Remarque

On peut vérifier, pour un trinôme, l'égalité entre ses formes *développée*, *canonique* et *factorisée*. Il suffit de développer ces deux dernières et de vérifier qu'elles sont égales à la forme développée.

Avec la forme développée du trinôme $3x^2 - 6x - 9$,
on peut vérifier que l'on obtient la forme canonique
$3(x-1)^2 - 12$ et la forme factorisée $3(x+1)(x-3)$.
On peut alors vérifier l'égalité entre ces trois formes :

$$3x^2 - 6x - 9 = 3(x-1)^2 - 12 = 3(x+1)(x-3).$$

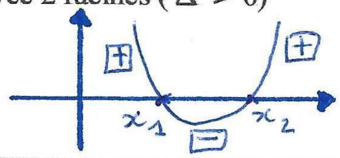
Comment faire le tableau de signes d'un trinôme : la méthode

Savoir réaliser le tableau de signes d'un trinôme est un ***résultat essentiel de cette année de première S***.
Il y a *deux méthodes* possibles, et elles utiliseront toutes les deux les éventuelles racines du trinôme.
→ La *première* va utiliser l'allure de la courbe (qui dépend du signe du coefficient a) et le nombre de racines du trinôme. Elle demandera principalement une ***bonne mémoire photographique*** !
→ La *deuxième* va utiliser l'éventuelle forme factorisée. Elle est plus calculatoire et elle demandera de réaliser un tableau de signes avec des fonctions affines (compétence vue en Seconde).
Afin de ne pas multiplier les apprentissages, on va concentrer nos efforts sur la première méthode.

Avec le coefficient "a" positif (courbe en forme de " ∪ ").

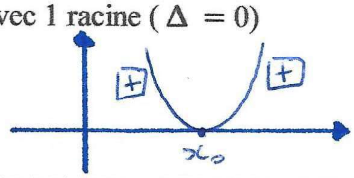
Allure de la courbe	Tableau de signes du trinôme

Avec 2 racines ($\Delta > 0$)



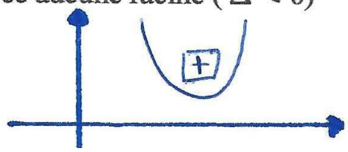
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signes du trinôme		+	0	−	0	+	

Avec 1 racine ($\Delta = 0$)



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signes du trinôme		+	0	+	

Avec aucune racine ($\Delta < 0$)

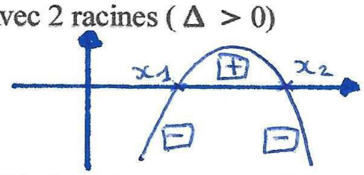


x	$-\infty$		$+\infty$
Signes du trinôme		+	

Avec le coefficient "a" négatif (courbe en forme de " ∩ ").

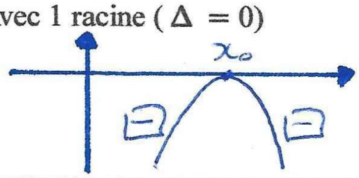
Allure de la courbe	Tableau de signes du trinôme

Avec 2 racines ($\Delta > 0$)



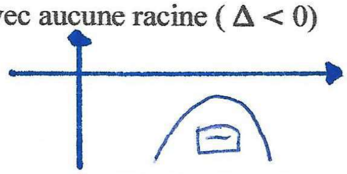
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signes du trinôme		−	0	+	0	−	

Avec 1 racine ($\Delta = 0$)



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signes du trinôme		−	0	−	

Avec aucune racine ($\Delta < 0$)



x	$-\infty$		$+\infty$
Signes du trinôme		−	

Comment faire le tableau de signes d'un trinôme : des exemples

La fiche précédente a présenté un résumé des *six possibilités* de tableau de signes pour un trinôme.
Nous allons traiter ici quelques exemples pour apprendre la mise en oeuvre de ces résultats.
La méthode suivie sera toujours la même :

- on calcule le discriminant Δ et les éventuelles racines du trinôme.
- on observe bien le signe du coefficient "*a*" pour connaitre l'allure de la courbe (en "$\cup$" ou en "$\cap$").
- on peut alors conclure en faisant le lien avec une des six possibilités de la fiche précédente !!

Exemple 1 : avec le trinôme $x^2 - 4x - 21$

On obtient $\Delta = 100$ et il y a donc 2 racines : -3 et 7 (*entrainez vous à retrouver ces résultats*)

Le coefficient *a* est *positif*, donc l'allure de la courbe sera "$\cup$"

On obtient le tableau de signes suivant

on place les deux racines

x	$-\infty$		-3		7		$+\infty$
Signes du trinôme		+	0	−	0	+	

Exemple 2 : avec le trinôme $-2x^2 - 4x - 2$

On obtient $\Delta = 0$ et il y a donc 1 racine : -1 (*entrainez vous à retrouver ces résultats*)

Le coefficient *a* est *négatif*, donc l'allure de la courbe sera "$\cap$"

On obtient le tableau de signes suivant

on place la racine

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signes du trinôme		−	0	−	

Exemple 3 : avec le trinôme $x^2 - 3x + 5$

On obtient $\Delta = -11$ et il n'y a donc aucune racine (*entrainez vous à retrouver ces résultats*)

Le coefficient *a* est *positif*, donc l'allure de la courbe sera "$\cup$"

On obtient le tableau de signes suivant

il n'y a pas de racine

x	$-\infty$		$+\infty$
Signes du trinôme		+	

Comment résoudre une inéquation du second degré
La méthode

Il est rare que les exercices proposent un énoncé demandant directement le tableaux de signes d'un trinome. Il faudra donc bien repérer les consignes qui vont amener la réalisation de ces tableaux.
On peut en donner deux exemples principaux :

- la résolution des *inéquations* (*que l'on va voir dans cette fiche*).
- l'étude des signes d'une *fonction dérivée* (quand on aura vu les fonctions dérivées bien sûr !)

La méthode pour résoudre une inéquation du type $x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$

La méthode est la suivante :

- on cherche les éventuelles *racines* du trinôme $x^2 + 5x - 6$.
- on réalise le *tableau de signes* du trinôme.
- on conclut en prenant les *intervalles* pour lesquels il y a le signe " + " dans le tableau car on cherche à résoudre une inéquation $\geqslant 0$ (et lorsqu'on aura une inéquation $\leqslant 0$, on prendra les intervalles pour lesquels il y a le signe " - ").

→ on résout l'équation $x^2+5x-6=0$ → $a=1$; $b=5$; $c=-6$

on calcule $\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times1\times(-6) = 49 > 0$

le discriminant est positif → il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times1} = \frac{-5-7}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times1} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

→ on en déduit le tableau de signes du trinôme

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
signes de x^2+5x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

→ on veut résoudre $x^2+5x-6 \boxed{\geqslant 0}$!

On prend les intervalles avec le signe $\boxed{+}$.

Les solutions de l'inéquation sont donc :

$$]-\infty ; -6] \cup [1 ; +\infty[$$

$\boxed{\text{Union}}$

Remarque

On restera vigilant sur le sens des crochets " [" ou "] " (ouverts ou fermés) en fonction du signe "supérieur" (>) ou "supérieur ou égal " (⩾).

Comment résoudre une inéquation du second degré
Une application

Il est rare que les exercices proposent un énoncé demandant directement le tableaux de signes d'un trinome. Il faudra donc bien repérer les consignes qui vont amener la réalisation de ces tableaux.
On peut en donner deux exemples principaux :

- la résolution des *inéquations* (*que l'on va voir dans cette fiche*).
- l'étude des signes d'une *fonction dérivée* (quand on aura vu les fonctions dérivées bien sûr !)

La méthode pour résoudre une inéquation $2x^2 + 11x - 15 \leqslant 3x - 5$

Comme souvent en mathématiques, on se ramène le plus rapidement possible aux méthodes déjà connues.
C'est bien le cas ici, puisque l'on va se ramener à la méthode générale de la fiche précédente.
Du coup, la méthode est la suivante :

- on regroupe tous les termes "à gauche" afin de bien faire apparaitre le *trinôme* à étudier.
- on cherche les éventuelles *racines* de ce "nouveau" trinôme $2x^2 + 8x - 10$.
- on réalise le *tableau de signes* de ce "nouveau" trinôme.
- on conclut en prenant les *intervalles* pour lesquels il y a le signe " - " dans le tableau car on cherche à résoudre une inéquation $\leqslant 0$.

→ on transforme l'inéquation $2x^2 + 11x - 15 \leqslant 3x - 5$

on obtient : $2x^2 + 11x - 3x - 15 + 5 \leqslant 0$

soit $2x^2 + 8x - 10 \leqslant 0$

→ on résout l'équation $2x^2 + 8x - 10 \leqslant 0$ → $a = 2$; $b = 8$; $c = -10$

on calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 144 > 0$

Le discriminant est positif → il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{144}}{2 \times 2} = \frac{-8 - 12}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{144}}{2 \times 2} = \frac{-8 + 12}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

→ on en déduit le tableau de signes du trinôme

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
signes de $2x^2 + 8x - 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

→ on veut "$\leqslant 0$", donc on prend l'intervalle avec $\boxed{-}$.

Les solutions de l'inéquation sont donc :

$$[-5 \,;\, 1]$$

Une étude complète de trinôme

On va reprendre ici, avec un exemple (***et à vous d'en faire d'autres !***), les différentes connaissances à avoir, les différents calculs à maitriser afin d'être parfaitement à l'aise avec l'étude d'un trinôme.

On va ici étudier le trinôme $-2x^2 + 4x + 6$ $\longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$

Les coordonnées du sommet

on calcule $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\times(-2)} = \dfrac{-4}{-4} = 1$

on calcule $\beta = -2\times1^2 + 4\times1 + 6 = -2\times1 + 4 + 6 = 8$

Donc le sommet aura pour coordonnées $(1 ; 8)$

La forme canonique du trinôme

$a(x-\alpha)^2 + \beta$ soit $-2(x-1)^2 + 8$

Le tableau de variations du trinôme (le coefficient a est négatif, courbe en "∩")

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations du trinôme $-2x^2 + 4x + 6$	$\nearrow$	8	$\searrow$

Les racines du trinôme (calcul du discriminant)

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times(-2)\times6 = 64 > 0$

Le discriminant est positif, il y a deux racines.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-2)} = \dfrac{-4-8}{-4} = \dfrac{-12}{-4} = 3$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+\sqrt{64}}{2\times(-2)} = \dfrac{-4+8}{-4} = \dfrac{4}{-4} = -1$

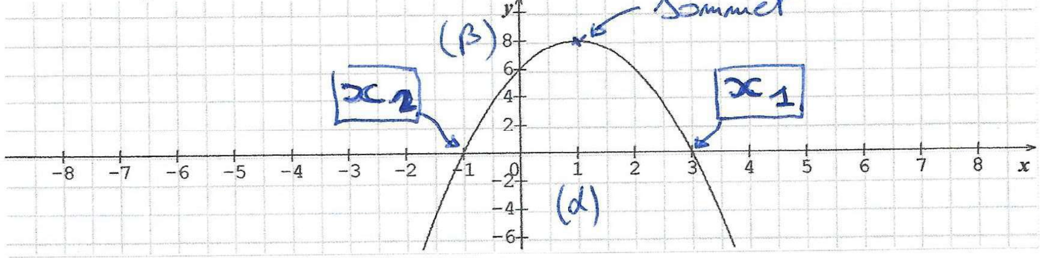
Le tableau de signes (le coefficient a est négatif, courbe en "∩")

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signes du trinôme $-2x^2 + 4x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La forme factorisée du trinome

$a(x-x_1)(x-x_2)$ soit $-2(x-3)(x-(-1)) = -2(x-3)(x+1)$

Allure de la courbe représentative



Comment résoudre un problème du second degré

Devant un *problème* mathématique, les étapes pour sa *résolution* sont toujours les mêmes :

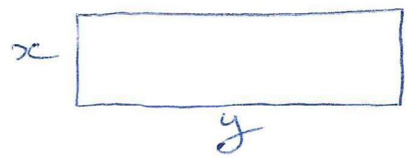
- on fait le choix de *l'inconnue* (très souvent appelé x) , ou des *inconnues* (si elles sont plusieurs).
- on retranscrit la consigne sous la forme d'une *expression algébrique*.
- on répond à la question en résolvant, suivant le cas, une équation ou une inéquation.

Un exemple très classique d'énoncé

Un rectangle a un périmètre égal à *96 m* et une aire égale à *540 m²*.
Quelles sont les mesures des côtés de ce rectangle ?

La solution

On fait un schéma :



On veut : périmètre $= 96 \rightarrow 2(x+y) = 96$

aire $= 540 \rightarrow x \times y = 540$

On résout le système : $\begin{cases} 2(x+y) = 96 \\ xy = 540 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 48 \\ xy = 540 \end{cases}$

On remplace y par $48 - x$ dans la 2ᵉ équation.

On obtient : $\begin{cases} y = 48 - x \\ x(48-x) = 540 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 48 - x \\ 48x - x^2 = 540 \end{cases}$

On résout alors : $48x - x^2 = 540$

soit $-x^2 + 48x - 540 = 0 \rightarrow a = -1 ; b = 48 ; c = -540$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 48^2 - 4 \times (-1) \times (-540) = 144 > 0$

Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-48 - \sqrt{144}}{2 \times (-1)} = 30$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-48 + \sqrt{144}}{2 \times (-1)} = 18$

Or, si $x = \boxed{30}$ alors on a $y = 48 - 30 = \boxed{18}$

et si $x = \boxed{18}$ alors on a $y = 48 - 18 = \boxed{30}$

<u>CONCLUSION</u> :

Le rectangle a des côtés qui mesurent 18 m et 30 m.

Le célèbre problème de la zone de baignade

Devant un *problème* mathématique, les étapes pour sa *résolution* sont toujours les mêmes :

- on fait le choix de *l'inconnue* (très souvent appelé x) , ou des *inconnues* (si elles sont plusieurs).
- on retranscrit la consigne sous la forme d'une *expression algébrique*.
- on répond à la question en résolvant, suivant le cas, une équation ou une inéquation, ou comme dans cette fiche en étudiant les variations d'un trinôme.

Un exemple célèbre d'énoncé : le problème de la zone de baignade

Un moniteur sur une plage veut délimiter une zone de baignade la "plus grande" possible, afin de pouvoir l'ouvrir au maximum de personnes.
Pour cela, il a une corde qui mesure 180 mètres, et qu'il va installer suivant le schéma ci-dessous.
Quelle doit être alors la largeur de cette zone de baignade rectangulaire pour que son aire soit la plus grande possible ?

→ schéma :

La solution

La corde mesure 180 m.

Donc on a : $2x + y = 180 \rightarrow y = 180 - 2x$

l'aire de la zone de baignade sera égale à :

$x \times y = x(180 - 2x) = -2x^2 + 180x$

On cherche le maximum du trinôme $-2x^2 + 180x$

$\hookrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 180 \\ c = 0 \end{cases}$

On calcule $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-180}{2 \times (-2)} = \dfrac{-180}{-4} = 45$

Donc, le maximum de ce trinôme (c'est à dire l'aire maximale) est obtenu pour une largeur égale à 45 m.

Cela correspond à une longueur égale à $180 - 2 \times 45$

soit une longueur égale à 90 m,

et on a une aire maximale de $45 \times 90 = 4050\ m^2$.