

## Module et argument d'un nombre complexe Propriétés

### Les propriétés (essentielles) du module

Pour deux nombres complexes  $z$  et  $z'$ , on aura :

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \text{ et donc, par conséquent, } |z^n| = |z|^n.$$

$$|z : z'| = |z| : |z'|$$

Par contre,  $|z + z'|$  n'est pas égal à  $|z| + |z'|$ . Il faudra faire attention aux "fausses propriétés" !

*Application :* On donne  $z_1 = 3 + 2i$ ,  $z_2 = 4 - i$  et  $z = \frac{z_1}{z_2}$ .

Pour calculer  $|z|$ , il serait fastidieux de calculer  $z$  avec la quantité conjuguée, puis le module du résultat.

$$\rightarrow \text{on fait plutôt } |z| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\text{avec } |z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ et } |z_2| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{Donc on a } |z| = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{13}{17}}.$$

### Les propriétés (essentielles) de l'argument

Pour deux nombres complexes  $z$  et  $z'$ , on aura :

$$\text{Arg}(z \times z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \text{ et donc, en conséquence, } \text{Arg}(z^n) = n \times \text{Arg}(z).$$

$$\text{Arg}(z : z') = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$$

Par contre,  $\text{Arg}(z \times z')$  n'est pas égal à  $\text{Arg}(z) \times \text{Arg}(z')$ . Encore une "fausse propriété" !

*Application :* On donne  $z = (1 + i)^{2019}$  et on cherche  $\text{Arg}(z)$ .

On ne va certainement pas développer la puissance 2019 !!

$$\rightarrow \text{on utilise } \text{Arg } z = \text{Arg} (1 + i)^{2019} = 2019 \times \text{Arg}(1 + i)$$

$$\text{avec } \text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc on a } \text{Arg } z = 2019 \times \frac{\pi}{4} = \frac{2019\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{or la mesure principale de } \frac{2019\pi}{4} \text{ est } \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Donc on a : } \text{Arg}(1 + i)^{2019} = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$