Définition d'un système de 2 équations à 2 inconnues

En classe de Seconde, vous avez souvent résolu des *équations à une inconnue* du type " $5x + 3 = 9$ " ou " $6x - 2 = 4x + 5$ ". Mais, lorsqu'il y a 2 inconnues dans un problème, on est amené à écrire 2 équations (en utilisant 2 informations) et on va ensuite résoudre cet ensemble de 2 équations, appelé *système de 2 équations à 2 inconnues*.

Définition et exemples

Par souci d'habitude et de cohérence, les 2 inconnues se noteront, en général, avec *les lettres x et y* ou avec les *lettres a et b* .

$\begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ 2x - 5y = 10 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues x et y.

$\begin{cases} 5a - b - 7 = 0 \\ 6a + 2b + 3 = 0 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 2 inconnues a et b.

Les solutions d'un système

On parlera en fait de *couple solution* car il y a deux inconnues, et donc il y a bien un ensemble de deux nombres à trouver.

Pour vérifier qu'un couple de nombres est bien le *couple solution* d'un système, il suffit de remplacer chaque lettre par sa valeur correspondante et on regarde si les ***2 égalités*** sont alors vérifiées.

<u>Exemple 1 :</u>

Le couple $(3;4)$ est solution du système $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$

car on a bien $\begin{cases} 5 \times 3 - 2 \times 4 = 15 - 8 = 7 \\ 3 \times 3 + 4 = 9 + 4 = 13 \end{cases}$

<u>Exemple 2 :</u>

Le couple $(5;6)$ n'est pas solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$

car, même si on a $2 \times 5 + 3 \times 6 = 10 + 18 = 28$

on aura par contre $4 \times 5 - 2 \times 6 = 20 - 12 = 8 \neq 7$

Comment résoudre un système : la méthode par combinaison

C'est la méthode que je préfère car c'est celle qui est la plus générale. Elle fonctionnera toujours , avec le même niveau de difficulté, quel que soit le système proposé. D'autres méthodes peuvent être plus simple pour certains systèmes mais elles pourront amener des calculs plus compliqués avec d'autres systèmes.

On veut résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x + 2y = 32 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$

Etape 1 : on multiplie ***toute*** l'équation (1) par 5 et ***toute*** l'équation (2) par 3 afin que le coefficient devant la lettre x soit égal dans les deux équations.

$$\begin{array}{l} (\times 5) \\ (\times 3) \end{array} \begin{cases} 3x + 2y = 32 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15x + 10y = 160 \\ 15x - 12y = 6 \end{cases}$$

Etape 2 : on soustrait alors les deux égalités entre elles pour "faire disparaitre" x .
En effet, par soustraction, on obtient $15\,x - 15\,x = 0$.

$$\ominus \begin{cases} 15x + 10y = 160 \\ 15x - 12y = 6 \end{cases}$$
$$0 + 22y = 154$$
$$\boxed{10 - (-12) = 22}$$

Etape 3 : on résout alors l'équation obtenue, à une inconnue, ce qui nous donnera la valeur de y .

On a : $22y = 154$
$y = 154 : 22 \rightarrow y = 7$

Etape 4 : on connait maintenant la valeur de y , et on remplace donc la lettre y par 7 dans les deux équations du système initial. On peut alors résoudre n'importe laquelle de ces équations (on va essayer de "lever un peu le nez", pour choisir celle qui parait la plus facile à résoudre).

On obtient $\begin{cases} 3x + 2\times 7 = 32 \\ 5x - 4\times 7 = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 3x + 14 = 32 \\ 5x - 28 = 2 \end{cases}$

→ on résout par exemple $5x - 28 = 2$
$5x = 30 \rightarrow x = 6$

<u>DONC</u> le couple solution du système est $(\underset{x}{6} \,;\, \underset{y}{7})$

Vérification : on va la faire pour cette fiche mais elle ne sera pas à faire pour chaque résolution .
On va donc remplacer ici x par 6 et y par 7.

On vérifie $\begin{cases} 3\times \underset{x}{6} + 2\times \underset{y}{7} = 18 + 14 = 32 \\ 5\times \underset{x}{6} - 4\times \underset{y}{7} = 30 - 28 = 2 \end{cases}$

Exemples de résolution de système par combinaison

Nous allons appliquer la *méthode par combinaison* avec deux exemples ayant des caractéristiques intéressantes. Les 4 étapes vues dans la fiche précédente vont être respectées , mais on ne va pas ici séparer autant ces étapes (afin de ne pas alourdir la rédaction).

Exemple 1 : pour lequel on va voir que, parfois, on ne multipliera qu'une seule égalité sur les deux.

On résout le système : $\begin{cases} 8x + 3y = 26 \\ 4x + 5y = 34 \quad (\times 2) \end{cases} \rightarrow \ominus \begin{cases} 8x + 3y = 26 \\ 8x + 10y = 68 \end{cases}$

$0 - 7y = -42$

soit $y = -42 : (-7) = 6$

On remplace alors y par 6

On obtient $\begin{cases} 8x + 3 \times 6 = 26 \\ 4x + 5 \times 6 = 34 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 18 = 26 \\ 4x + 30 = 34 \end{cases}$

On résout par exemple $8x + 18 = 26$

$\rightarrow 8x = 8 \rightarrow x = 8 : 8 = 1$

<u>DONC</u> le couple solution du système est $(1 ; 6)$

Exemple 2 : pour lequel une gestion efficace des soustractions et des nombres négatifs est nécessaire.

On résout le système : $\begin{cases} -4x + y = -12 \quad \times(-3) \\ 3x + 2y = -2 \quad (\times 4) \end{cases} \rightarrow \ominus \begin{cases} 12x - 3y = 36 \\ 12x + 8y = -8 \end{cases}$

$0 - 11y = 44$

$\boxed{-3-8}$ $\boxed{36-(-8)}$

soit $y = 44 : (-11) = -4$

On remplace alors y par (-4)

On obtient $\begin{cases} -4x + (-4) = -12 \\ 3x + 2 \times (-4) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - 4 = -12 \\ 3x - 8 = -2 \end{cases}$

On résout par exemple $3x - 8 = -2$

$\rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 6 : 3 = 2$

<u>DONC</u> le couple solution du système est $(2 ; -4)$

Une autre méthode pour résoudre un système : la substitution

Cette méthode sera intéressante à utiliser losque *l'un des coefficients du système est égal à 1 ou à -1.*
Dans ces cas, une des inconnues peut être isolée "rapidement" , sans avoir de division à effectuer.

Exemples : les systèmes suivants peuvent être traitées avec la *méthode par substitution* (ne pas oublier cependant, qu'à tout moment, la *méthode par combinaison* serait applicable).

$$\begin{cases} 4x + 5y = 22 \\ 6x \boxed{-y} = 16 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 7x - 6y = 9 \\ 4x \boxed{+y} = 14 \end{cases}$$

C'est ce qui amène vers la méthode par substitution

La méthode

On veut résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x - 4y = 7 & \text{équation (1)} \\ 2x + y = 12 & \text{équation (2)} \end{cases}$

Etape 1 : on isole ici la lettre y dans l'équation (2) et on remplace cette expression de y dans l'équation (1). On n'oubliera pas de bien mettre des parenthèses sur l'expression remplacée.

$$\text{On a} \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ y = 12 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4(12 - 2x) = 7 \\ y = 12 - 2x \end{cases}$$

Etape 2 : après développement, l'équation (1) devient une *équation à une inconnue*. On la résout, afin de trouver la valeur de x (*on prendra l'habitude de bien conserver le système écrit avec ses deux équations*).

On résout : $3x - 4(12 - 2x) = 7$

$3x - 48 + 8x = 7$

$11x = 55$

$x = 55 : 11 = 5 \rightarrow x = 5$

Etape 3 : on connait maintenant la valeur de x , et on remplace donc la lettre x par 5 dans l'équation (2).
On obtient alors directement la valeur de y.

$$\text{On a} \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 - 2 \times 5 = 2 \end{cases}$$

<u>DONC</u> le couple solution du système est $(5 ; 2)$

Vérification : on va la faire pour cette fiche mais elle ne sera pas à faire pour chaque résolution .
On va donc remplacer ici x par 5 et y par 2.

$$\text{On vérifie} \begin{cases} 3 \times 5 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7 \\ 2 \times 5 + 2 = 10 + 2 = 12 \end{cases}$$

Quelques systèmes particuliers (1)

Certains systèmes proposés auront une particularité qui fera que la résolution ne nécessite ni la méthode par combinaison ni la méthode par substitution (ces méthodes fonctionneraient mais ce serait plus long).

Exemple 1 : parfois, le coefficient d'une des inconnues est *le même dans les deux équations* , ou ils sont *opposés*. On pourra alors directement additionner ou soustraire les deux équations entre elles.

On veut résoudre le système suivant

$$\boxed{+}\quad \left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 17 \\ 4x - 2y = 18 \\ \hline 7x + 0 = 35 \end{array}\right.$$

on additionne directement les deux égalités pour faire "disparaître" y

On résout $7x = 35 \rightarrow x = 35 : 7 = 5$

on remplace alors x par 5

$$\left\{\begin{array}{l} 3\times5 + 2y = 17 \\ 4\times5 - 2y = 18 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 15 + 2y = 17 \\ 20 - 2y = 18 \end{array}\right.$$

On résout, par exemple, $15 + 2y = 17$

$2y = 2 \rightarrow y = 2 : 2 = 1$

<u>DONC</u> le couple solution du système est $(5 ; 1)$

Exemple 2 : lorsqu'on cherche le point d'intersection de deux droites dont on connait les équations réduites, on obtient un système pour lequel les deux équations sont du type " $y = ...$ ". Il suffit alors d'égaliser les deux expressions, et on aura juste à résoudre une *équation à une inconnue*.

→ on cherche le point d'intersection des droites (d_1) : $y = 5x - 3$ et (d_2) : $y = 3x - 7$

On veut résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} y = 5x - 3 \\ y = 3x - 7 \end{array}\right.$$

on résout directement : $5x - 3 = 3x + 7$

$\rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 10 : 2 = 5$

on remplace alors x par 5

$$\left\{\begin{array}{l} y = 5\times5 - 3 = 25 - 3 = 22 \\ y = 3\times5 + 7 = 15 + 7 = 22 \end{array}\right.$$

<u>DONC</u> le couple solution (et point d'intersection) correspond à $(5 ; 22)$

Quelques systèmes particuliers (2)

On va finir avec des cas encore plus particuliers.
Certains systèmes n'auront *pas de solution*. On va s'en rendre compte avec une *absurdité* qui va apparaitre pendant la résolution.
Et d'autres systèmes auront une *infinité de solutions* (les deux égalités sont, en fait, proportionnelles).

Exemple 1
On veut résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ -6x + 8y = 9 \end{cases}$

On a : $\begin{matrix} \times(-2) \\ \end{matrix} \begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ -6x + 8y = 9 \end{cases} \rightarrow \boxed{-} \begin{cases} -6x + 8y = 10 \\ -6x + 8y = 9 \end{cases}$

$$0 + 0 = 1$$

On obtient donc une absurdité ($0 = 1$!)
<u>Donc</u> le système n'a pas de solution.

Exemple 2
On veut résoudre le système suivant $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$

On a : $\begin{matrix} (\times 3) \\ \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases} \rightarrow \boxed{-} \begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$

$$0 + 0 = 0$$

On obtient une égalité toujours vérifiée ($0 = 0$!)
Le système a donc une infinité de solutions.
Ce sont tous les couples vérifiant $2x - y = 4$ ou $6x - 3y = 12$ (ces deux équations sont bien proportionnelles).