La convergence d'une suite

Le mot *convergence* est un mot du vocabulaire mathématiques (difficile de le croiser ailleurs !).
Il signifie "qu'une suite numérique *possède **une** limite **finie*** (et *une seule*)", c'est à dire que la suite va tendre vers un *nombre réel* lorsque *n* va tendre vers + ∝.
Si une suite numérique ne converge pas, alors on dit qu'elle *diverge* (elle est *divergente*). Cela peut signifier que cette suite a une *limite infinie* (elle tend vers + ∝ ou vers - ∝) ou qu'elle *n'a pas de limite* !!

Des exemples

$U_n = \frac{3}{n}$ → suite convergente vers 0

$U_n = -2 + \frac{1}{n}$ → suite convergente vers −2

$U_n = n^2 + 3$ → suite divergente vers +∞

$U_n = (-1)^n$ → suite divergente (pas de limite)

Théorème : Dans beaucoup d'exercices , on va nous faire démontrer qu'une suite numérique est majorée (respectivement minorée) **ET** qu'elle est croissante (respectivement décroissante).
On pourra alors appliquer des théorèmes qui se résument ainsi :

Si une suite numérique est *croissante* ET *majorée* , alors cette suite est *convergente.*
Si une suite numérique est *décroissante* ET *minorée* , alors cette suite est *convergente.*

Exemple 1 : avec (U_n) croissante et $U_n \leq 10$.
La suite (U_n) est donc croissante et majorée par 10.
Donc la suite (U_n) est convergente.

Exemple 2 : avec (V_n) décroissante et positive
La suite (V_n) est donc décroissante et minorée par 0.
Donc la suite (V_n) est convergente.

Remarque : *Il faudra se méfier des conclusions hatives. Une suite croissante et majorée par le nombre 3 est forcément convergente , mais elle ne converge pas forcément vers ce nombre 3 !!*

Comment trouver la limite d'une suite

Un point très important à retenir d'entrée : étudier la limite d'une suite, c'est observer son comportement ***lorsque n tend vers*** $+\infty$. J'insiste : **la lettre *n* tendra forcément vers** $+\infty$!!

Les "grands tableaux indigestes" donnés par les livres ne sont pas, selon moi, à apprendre.
En effet, dans une recherche de limite, il y a *4 cas* , appelé les *formes indéterminées*, qui réclament des calculs et/ou des raisonnements mais sinon , *tous les autres cas de limites* ne sont que des règles simples de calculs.

Les 4 formes indéterminées qu'il faut, elles, connaitre par coeur

Pour ces 4 cas, il y aura un "problème" qu'il faudra apprendre à régler.

$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$

Quelques exemples de limites "faciles", sans formes indéterminées

On va voir dans les exemples ci-dessous que, si on n'est pas dans un cas de forme indéterminée, le bon sens en calculs nous permet logiquement de conclure. Faites vous confiance !!

Exemple 1 : avec $U_n = 3 + 5 \times (1,2)^n$

On a $1,2 > 1$ → on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,2^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ $\boxed{\text{limite du type } 3 + 5 \times (+\infty)}$

Exemple 2 : avec $V_n = 10 - 2 \times (0,85)^n$

On a $-1 < 0,85 < 1$ → on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 10$ $\boxed{\text{limite du type } 10 - 2 \times 0}$

Exemple 3 : avec $W_n = \dfrac{e^{-n}}{\ln n}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$ $\boxed{\text{limite du type } \frac{0}{+\infty}}$

Rappel sur les limites des suites du type q^n

Ces limites ont normalement été vues en classe de Première, mais il est indispensable de se les rappeler car la question des limites sera omniprésente dans tous les exercices cette année.

Limites des suites du type q^n

si on a $-1 < q < 1$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
si on a $q > 1$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Exemples :

$$\lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (1,2)^n = +\infty$$

Le dernier cas est à connaitre, mais il n'est pas exigible en classe de Terminale.

Si on a $q < -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

Applications

La majorité des exercices de Terminale nous amène à montrer qu'une suite, donnée par l'énoncé, est géométrique. Elle s'écrira donc avec une expression du type q^n, et on pourra donner sa limite.

Exemple 1 : avec $Un = 4 + 5 \times (0,7)^n$

On a $-1 < 0,7 < 1 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (0,7)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5 \times (0,7)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 4$

Exemple 2 : avec $Vn = 6 + 4 \times (2,3)^n$

On a $2,3 > 1 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (2,3)^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 \times (2,3)^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

Exemple 3 : avec $Wn = 7 - 2 \times (1,03)^n$

On a $1,03 > 1 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (1,03)^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -2 \times (1,03)^n = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = -\infty$

Comment on lève des indéterminations par factorisation

Quand on se retrouve devant une *forme indéterminée*, il faut agir avec, en général, un calcul algébrique qui va permettre de remplacer l'écriture initiale par une autre écriture égale à la première, sauf qu'elle permettra , elle, de conclure pour la limite : on dit alors qu'on a *levé l'indétermination* !

Des exemples en utilisant des factorisations

L'idée sera alors de factoriser chaque partie des expressions par leur *terme prépondérant* (soit "le plus important"), qui sera, pour les polynômes, leur terme de plus haut degré.

Attention, dans un quotient, on ne factorisera pas forcément en haut et en bas par le même terme.

Exemple 1 : avec $U_n = \dfrac{6n+1}{2n+7}$ → F.I du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

↳ Forme Indéterminée

On a $\dfrac{6n+1}{2n+7} = \dfrac{n\left(6+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{7}{n}\right)} = \dfrac{6+\boxed{\frac{1}{n}}}{2+\boxed{\frac{7}{n}}}$ suites qui tendent vers 0

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{6}{2} = \boxed{3}$

Exemple 2 : avec $V_n = \dfrac{4n+2}{n^2-3n+6}$ → F.I du type $\dfrac{\infty}{\infty-\infty}$

On a $\dfrac{4n+2}{n^2-3n+6} = \dfrac{n\left(4+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} = \dfrac{4+\boxed{\frac{2}{n}}}{n\left(1-\boxed{\frac{3}{n}}+\boxed{\frac{6}{n^2}}\right)}$ suites qui tendent vers 0

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \boxed{0}$ (limite du type $\dfrac{4}{+\infty \times 1}$)

Exemple 3 : avec $W_n = \dfrac{n^3-8}{2n^2+5}$ → F.I du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

On a $\dfrac{n^3-8}{2n^2+5} = \dfrac{n^3\left(1-\frac{8}{n^3}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{n\left(1-\boxed{\frac{8}{n^3}}\right)}{2+\boxed{\frac{5}{n^2}}}$ suites qui tendent vers 0

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \boxed{+\infty}$ (limite du type $\dfrac{+\infty \times 1}{2}$)

Comment on lève des indéterminations avec les croissances comparées

Quand on se retrouve devant une *forme indéterminée*, il faut agir avec, en général, un calcul algébrique qui va permettre de remplacer l'écriture initiale par une autre écriture égale à la première, sauf qu'elle permettra , elle, de conclure pour la limite : on dit alors qu'on a *levé l'indétermination* !

Des exemples en utilisant les croissances comparées

D'une façon très schématique, on n'oubliera que le comportement de l'*exponentielle* l'emporte sur le comportement des *puissances de n* qui lui même l'emporte sur le comportement du *ln*.
Il est très souvent nécessaire de *factoriser* l'expression avant d'appliquer ces *croissances comparées*.

Exemple 1 : avec $V_n = n^2 - \ln n \rightarrow$ F.I du type $\infty - \infty$

Forme Indéterminée

On factorise : $n^2 - \ln n = n^2\left(1 - \boxed{\dfrac{\ln n}{n^2}}\right)$

tend vers 0 par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ (limite du type $\infty \times (1-0)$)

Exemple 2 : avec $V_n = e^{-n} \times n^2 \rightarrow$ F.I du type $0 \times (+\infty)$

On a : $e^{-n} \times n^2 = \dfrac{1}{e^n} \times n^2 = \boxed{\dfrac{n^2}{e^n}}$

tend vers 0 par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Exemple 3 : avec $W_n = \dfrac{e^n - \ln n}{n^2} \rightarrow$ F.I du type $\dfrac{\infty - \infty}{\infty}$

On factorise : $\dfrac{e^n - \ln n}{n^2} = \dfrac{e^n\left(1 - \dfrac{\ln n}{e^n}\right)}{n^2} = \dfrac{e^n}{n^2}\left(1 - \dfrac{\ln n}{e^n}\right)$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{e^n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$ (limite du type $+\infty \times (1-0)$)

Limite de suite et théorèmes de comparaison

Principe de base

SI on réussit à montrer qu'une suite (U_n) est, à partir d'un certain rang, *supérieure* à une autre suite (V_n)
ET que l'on sait que la suite (V_n) *diverge vers* $+\infty$,
ALORS on comprend très instinctivement que la suite (U_n) va également *diverger vers* $+\infty$!

Les théorèmes de comparaison

Si on a $U_n \geq W_n$ à partir d'un certain rang
avec $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

Si on a $U_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang
avec $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = -\infty$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

Des exemples d'application

<u>Exemple 1</u> : on suppose $U_n \geq n+3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+3) = +\infty$

Donc, par <u>comparaison</u>, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

<u>Exemple 2</u> : on suppose $U_n \leq -n^2+4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n^2+4) = -\infty$

Donc, par <u>comparaison</u>, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

Remarque : *il faut bien faire attention à respecter les hypothèses de ces théorèmes !!*

Par exemple, si on sait que $U_n \leq W_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 9$,

alors on ne peut <u>rien</u> conclure pour (U_n) !

Limite de suite et théorème des gendarmes

Principe de base

SI on réussit à montrer qu'une suite (U_n) est, à partir d'un certain rang, *comprise entre* deux suites (V_n) et (W_n) , ***ET*** que l'on sait que les suites (V_n) et (W_n) converge *vers une même limite notée l* ,
ALORS on comprend très instinctivement que la suite (U_n) va également *converger vers cette limite l* .
En fait, la suite (U_n) est encadrée par deux suites qui "vont dans la même direction", comme un prisonnier amené à la prison en étant tenu par deux gendarmes !

Le théorème des gendarmes

Si on a $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ à partir d'un certain rang avec $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

Ce théorème sera souvent utilisé avec des suites utilisant *cos* (*n*) , *sin* (*n*) ou (- 1) ^{n} , car on aura, à chaque fois, un *encadrement* de ces termes.

En effet, pour tout *n* , on sait que : $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$; $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

Exemples d'application

<u>Exemple 1</u> : on suppose $3 - \frac{1}{n^2} \leqslant U_n \leqslant 3 + \frac{1}{n^2}$, pour $n \geqslant 1$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{n^2}\right) = 3$

Donc, d'après le <u>théorème des gendarmes</u>, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

<u>Exemple 2</u> : avec $U_n = \dfrac{2\cos n + 3}{n}$, pour $n \geqslant 1$

On a $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$

$\rightarrow \quad -2 \leqslant 2\cos n \leqslant 2$

$\rightarrow \quad 1 \leqslant 2\cos n + 3 \leqslant 5$

soit $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{2\cos n + 3}{n} \leqslant \dfrac{5}{n}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Comment montrer qu'une suite est géométrique (1)

La fiche de Première sur les suites arithmético-géométriques doit être revue car elle donne le cadre général du travail concernant les suites auxiliaires et leur utilisation pour obtenir des suites géométriques. Nous allons voir ici un premier exemple *type Bac* pour lequel la méthode générale reste conforme à ce travail de Première mais il y aura une difficulté liée au mode de définition de la suite.

Enoncé

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

On va montrer que la suite *Vn* est géométrique et on en déduira une expression de *Vn* , puis de *Un* en fonction de *n*.

On écrit la formule (3) : $U_n = V_n - 2n^2 - 3n - 5$

$\rightarrow$ on part de $\underset{(2)}{V_{n+1}} = U_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$

$\boxed{\text{on remplace } n \text{ par } (n+1)}$

on obtient $V_{n+1} = U_{n+1} + \underbrace{2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5}$

$\overset{(1)}{=} 2U_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 7n + 10$

$\overset{(3)}{=} 2(V_n - 2n^2 - 3n - 5) + 2n^2 - n + 2n^2 + 7n + 10$

$= 2V_n - \cancel{4n^2} - \cancel{6n} - 10 + \cancel{2n^2} - \cancel{n} + \cancel{2n^2} + \cancel{7n} + 10$

Donc $V_{n+1} = 2V_n$ (avec $V_0 = U_0 + 2\times 0^2 + 3\times 0 + 5 = 7$)

Conclusion pour la suite auxiliaire (V_n)

(V_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $V_0 = 7$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (V_n)

On a $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} \rightarrow V_n = 7 \times (2^n)$

On obtient donc la formule explicite pour la suite initiale (U_n)

On a : $U_n = V_n - 2n^2 - 3n - 5$

$\rightarrow U_n = 7\times(2^n) - 2n^2 - 3n - 5$

Comment montrer qu'une suite est géométrique (2)

Nous allons voir ici un deuxième exemple *type Bac* pour lequel la méthode générale reste toujours la même, mais le travail sera rendu difficile par le calcul fractionnaire.

Enoncé

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

On va montrer que la suite *Vn* est géométrique et on en déduira une expression de *Vn* , puis de *Un* en fonction de *n*.

On écrit la formule (3) : $U_n = \dfrac{V_n}{n+1}$

→ on part de $V_{n+1} \underset{(2)}{=} (n+2)U_{n+1}$ $\boxed{\text{on remplace } (n+1) \text{ par } (n+1+1) \,!}$

→ $V_{n+1} \underset{(1)}{=} (n+2)\left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right)U_n = \dfrac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}}U_n$

→ $V_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}U_n \underset{(3)}{=} \dfrac{\cancel{n+1}}{2} \times \dfrac{V_n}{\cancel{n+1}} = \dfrac{V_n}{2} = \dfrac{1}{2}V_n$

Donc $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n$ (avec $V_0 = (0+1)U_0 = 1$)

Conclusion pour la suite auxiliaire (V_n)

(V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 1$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (V_n)

On a $V_n = V_0 \times q^{(n-0)}$ → $V_n = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

On obtient donc la formule explicite pour la suite initiale (U_n)

On a $U_n = \dfrac{V_n}{n+1}$ → $U_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}$