Les probabilités conditionnelles - Définition

Point de départ

Pour bien comprendre ce qu'est une *probabilité conditionnelle*, il faut revenir sur le travail concernant les tableaux à double entrée. Prenons l'exemple suivant qui concerne les élèves d'un lycée :

	Pratiquent un sport (S)	Ne pratiquent pas de sport ($\overline{S}$)	Total
Filles (F)	27	3	30
Garçons (G)	13	7	20
Total	40	10	50

On peut alors donner le résultat des probabilités suivantes (on imagine que l'on tire au hasard une fiche d'élève et que l'on regarde son profil) :

- la probabilité que l'élève soit une fille : $p(F) = \frac{30}{50} = 0,6$
- la probabilité que l'élève pratique du sport : $p(S) = \frac{40}{50} = 0,8$
- la probabilité que l'élève soit une fille ET qu'elle pratique du sport : $p(F \cap S) = \frac{27}{50} = 0,54$

Les probabilités conditionnelles

On aura des *probabilités conditionnelles* lorsque l'on se posera une des trois questions suivantes (qui sont équivalentes).

- *Quelle est la probabilité de pratiquer un sport* ***SACHANT QUE*** *l'élève est une fille ?*
- ***PARMI*** *les filles, quelle est la probabilité que l'élève pratique un sport ?*
- *On sait que l'élève est une fille. Quelle est la probabilité que l'élève pratique un sport ?*

On peut observer que cela correspond, en fait, à un changement d'univers dans le calcul de la probabilité : on se placera ici dans *l'univers des filles* (et non plus dans l'univers total de tous les élèves).

Notation

Il faut à tout prix bien respecter la notation des probabilités conditionnelles. L'univers dans lequel on se place doit s'écrire en *indice* !

On va calculer la probabilité de faire du sport <u>sachant que</u> l'élève est une fille → c'est $P_F(S)$.

On a : $P_F(S) = \frac{27}{\boxed{30}} = 0,9$

on se place dans l'univers des 30 filles

Remarque :

Il faut bien surveiller la lettre qui est en indice. Sous peine de ne pas calculer la bonne probabilité !

La probabilité $P_S(F)$ correspond à la probabilité d'être une fille <u>sachant que</u> l'élève est sportif.

On a : $P_S(F) = \frac{27}{\boxed{40}} = 0,675$

on se place dans l'univers des 40 sportifs

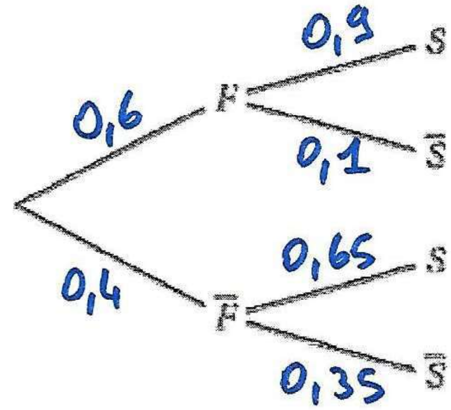
Utilisation d'un arbre de probabilité

Ces *arbres* représentent le meilleur moyen de visualiser une situation de probabilité conditionnelle.
Dans la situation classique d'un arbre où il y a deux branches à chaque fois, on a les règles suivantes :

- *la somme des probabilités des deux branches est égale à 1* (ce qui permet toujours de calculer la probabilité de la deuxième branche si on connait celle de la première).
- les probabilités conditionnelles se trouvent sur la "*partie droite*" de l'arbre.
- il y a *six probabilités* que l'on peut directement lire sur l'arbre. C'est important de bien s'en souvenir pour faire la différence entre ces six probabilités qui ne nécessitent aucun calcul technique et les autres probabilités qui, elles, en demanderont un.

Un exemple d'arbre de probabilités et les six probabilités que l'on peut y lire

Dans cet exemple, la lettre F représente *l'événement "Fille"*, la lettre $\overline{F}$ représente *l'événement "Non Fille"* c'est à dire *"Garçon"*, la lettre S représente *l'événement "Sportif"* et donc $\overline{S}$ représente *"Non-Sportif"*.



On peut lire directement les probabilités des deux événements écrits "au début de l'arbre".

On a : $p(F) = 0{,}6$

$p(\overline{F}) = 1 - p(F) = 0{,}4$

Et on peut lire les quatre probabilités conditionnelles, qui se trouvent sur la "partie droite" de l'arbre.

On a : $p_F(S) = 0{,}9$ et $p_F(\overline{S}) = 0{,}1$

$p_{\overline{F}}(S) = 0{,}65$ et $p_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0{,}35$

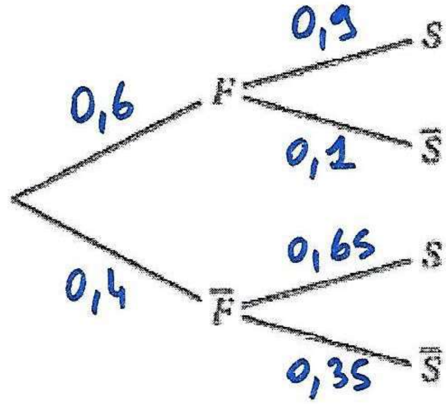
Remarque

Par contre, il faut bien comprendre que l'on ne peut pas lire directement, sur cet arbre, la probabilité d'être une fille *sachant que* l'on est sportif , soit $p_S(F)$. Cette probabilité sera à calculer (et à voir sur les fiches suivantes ...).

Comment calculer une probabilité d'intersection

On part de l'arbre de probabilité suivant

Dans cet exemple, la lettre F représente *l'événement "Fille"*, la lettre $\overline{F}$ représente *l'événement "Non Fille"* c'est à dire *"Garçon"*, la lettre S représente *l'événement "Sportif"* et donc $\overline{S}$ représente *"Non-Sportif"*.



Le calcul d'une probabilité d'intersection

On aura une *probabilité d'intersection* lorsque l'on se posera une des deux questions suivantes (qui sont équivalentes). On utilisera alors le symbole *intersection* " $\cap$ " .

- quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille ***ET*** pratique un sport ?
- quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille sportive ?

Méfiance ! Il ne faut pas confondre ces phrases avec celles des probabilités conditionnelles.

La formule générale est :

$$P(F \cap S) = p(F) \times P_F(S)$$

intersection ⇔ "et"

On effectue donc le calcul suivant :

$$P(F \cap S) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$$

On obtient de même les trois autres probabilités d'*intersection* :

$$P(F \cap \overline{S}) = p(F) \times P_F(\overline{S}) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

$$P(\overline{F} \cap S) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(S) = 0,4 \times 0,65 = 0,26$$

$$P(\overline{F} \cap \overline{S}) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,4 \times 0,35 = 0,14$$

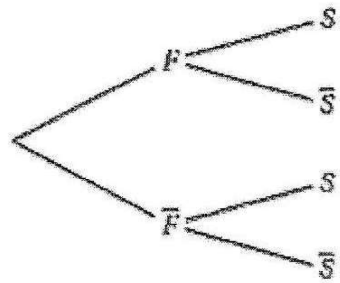
Remarques

- La somme des quatre probabilités d'*intersection* est égale à 1.
- On a bien sûr $p(F \cap S) = p(S \cap F)$. L'ordre des lettres n'a ici aucune importance.
- On pourra aussi calculer des probabilités d'*union* " $\cup$ " en se souvenant de la formule $p(F \cup S) = p(F) + p(S) - p(F \cap S)$

La formule des probabilités totales

Cette *formule des probabilités totales* va nous permettre d'exprimer la probabilité des événements placés dans la "deuxième partie" de l'arbre.

La formule des probabilités totales



On pourra écrire :

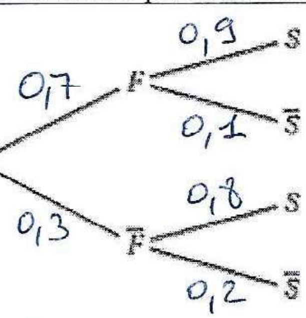
$$p(S) = p(F \cap S) + p(\overline{F} \cap S)$$

$$p(\overline{S}) = p(F \cap \overline{S}) + p(\overline{F} \cap \overline{S})$$

On part d'un arbre dont on connait toutes les probabilités.

C'est l'utilisation *directe* de la *formule des probabilités totales*.

On a un arbre de probabilité, on connait toutes les probabilités dans cet arbre, et on va pouvoir en déduire les probabilités des événements arrivant en deuxième partie de l'arbre.



On applique la formule des probabilités totales :

$$p(S) = p(F \cap S) + p(\overline{F} \cap S)$$

$$= 0,7 \times 0,9 + 0,3 \times 0,8$$

$$= 0,63 + 0,24$$

On obtient : $p(S) = 0,87$

Remarque

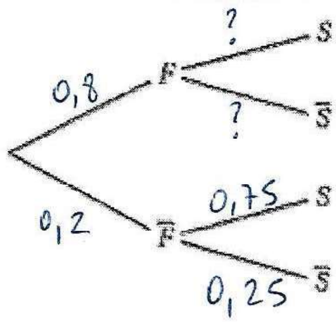
Pour calculer $p(\overline{S})$ (qui va être égale à 0,13), on pourrait :

- soit utiliser la *formule des probabilités totales* : $p(\overline{S}) = p(\overline{S} \cap F) + p(\overline{S} \cap \overline{F})$
- soit utiliser les *événements contraires* : $p(\overline{S}) = 1 - p(S)$

Utilisation de la formule des probabilités totales

On va, à nouveau, utiliser la *formule des probabilités totales* mais cette fois elle va nous aider à retrouver des probabilités de l'arbre qui est donné incomplet.

On part d'un arbre dont certaines probabilités sont à retrouver.
On pourrait parler ici de calcul *indirect* .
Certaines probabilités de l'arbre sont inconnues, mais on connait $p(F)$, $p(\overline{F})$, $p(S)$ et $p(\overline{S})$.
La formule des probabilités totales va nous permettre de compléter tout l'arbre !



On sait que $p(S) = 0,45$
et on cherche à calculer $p(F \cap S)$.

On applique la formule des probabilités totales

$$p(S) = p(F \cap S) + p(\overline{F} \cap S)$$

$$\rightarrow 0,45 = p(F \cap S) + 0,2 \times 0,75$$

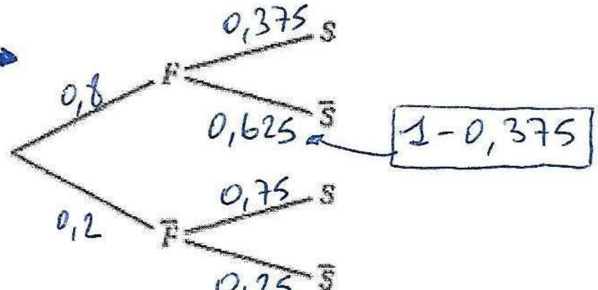
$$\rightarrow 0,45 = p(F \cap S) + 0,15$$

On obtient : $p(F \cap S) = 0,45 - 0,15$
$= 0,3$

Remarque
Si on voulait dans cette situation retrouver la valeur de $p_F(S)$, il faudra utiliser la formule du quotient de la fiche suivante ! On va quand même l'utiliser ici, car cela permet de finaliser le travail.

On a : $P_F(S) = \dfrac{p(F \cap S)}{p(F)} = \dfrac{0,3}{0,8} = 0,375$

On en déduit
l'arbre complet →



Probabilités conditionnelles et quotient. "Arbre inversé"

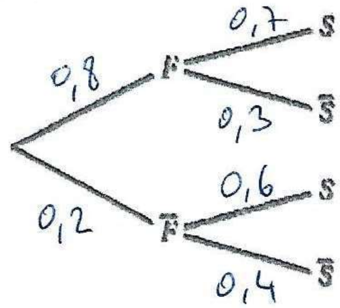
Si on nous demande de calculer une probabilité conditionnelle *non donnée* dans l'arbre, il faudra utiliser la formule suivante (en faisant bien attention à la *place des lettres* à chaque fois).

La formule du quotient pour une probabilité conditionnelle

Elle nous permettra de calculer une probabilité conditionnelle du type p (F sachant S), soit $p_S(F)$.

On a : $$p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)}$$

Application : On considère l'arbre de probabilité suivant



On veut calculer la probabilité conditionnelle $p_S(F)$ (qui n'est pas dans l'arbre car il ne faut confondre cette probabilité avec $p_F(S)$ qui vaut ici 0,7 et qui se lit dans l'arbre !).

Etape 1 : on applique la *formule des probabilités totales* pour calculer $p(S)$.

On obtient : $$p(S) = p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S)$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}6$$
$$= 0{,}56 + 0{,}12$$
$$\rightarrow p(S) = 0{,}68.$$

Etape 2 : on applique la *formule du quotient* pour calculer $p_S(F)$

On obtient : $$p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} = \frac{0{,}56}{0{,}68}$$

$$\rightarrow p_S(F) = \frac{14}{17} \approx 0{,}82$$

Remarque

On parle d'"arbre inversé" car c'est comme si, avec $p_S(F)$, on remontait l'arbre "à l'envers".

Probabilités conditionnelles et suites

De plus en plus d'exercices du bac mélangent les probabilités conditionnelles avec l'étude d'une suite. Il faut donc s'entrainer avec un exerice type car, par exemple, la question 2 devra être traitée à l'aide d'un arbre de probabilités (et surtout pas en faisant une récurrence, ce qui pourrait être un premier réflexe)

Enoncé (voir Bac S Liban 2018 Exercice 5 enseignement obligatoire)

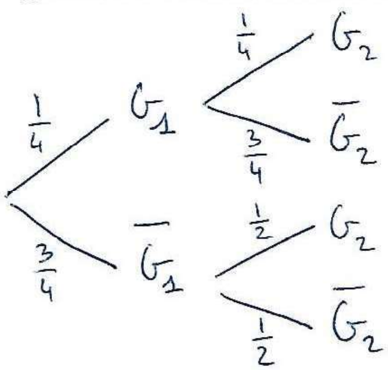
Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la $n^{\text{ième}}$ partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

Question 1 : on fait un arbre de probabilité illustrant le lien entre la première partie et la deuxième partie.



Avec la formule des probabilités totales,

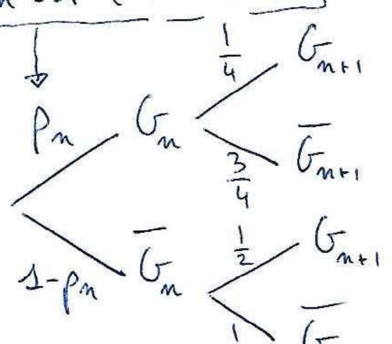
on a $p_2 = p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p(G_2 \cap \overline{G_1})$

$\rightarrow p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$

Question 2 : on fait un arbre de probabilité illustrant le lien entre la partie n et la partie suivante $n + 1$.

$\boxed{p_n \text{ est l'inconnue}}$



Avec la formule des probabilités totales,

on a $p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$

$\rightarrow p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_n$

$\rightarrow p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Les probabilités conditionnelles n'ont pas changé.}}$

Question 3 : La suite de l'exercice consistera à travailler avec une suite auxiliaire $Vn = Pn - \frac{2}{5}$. On montrera que cette suite (Vn) est géométrique (n'hésitez pas à le vérifier !).