Module d'un nombre complexe
Distance entre deux points

Définition et calcul du module

Pour un nombre complexe s'écrivant $z = a + \mathrm{i}\, b$, son ***module*** noté $|z|$ sera égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.
Ce module est donc un nombre réel. Il représente la ***distance*** entre le point correspondant et l'origine du repère. Donc, pour un point M, d'affixe z_M , on aura $|z_M| =$ **OM** .

avec $z_A = 2+3i$,
on a $OA = |z_A| = |2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

avec $z_B = 1-i$,
on a $OB = |z_B| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

avec $z_C = -4+\sqrt{2}\, i$,
on a $OC = |z_C| = |-4+\sqrt{2}\, i| = \sqrt{(-4)^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+2} = \sqrt{18}$

avec $z_D = 6i$,
on a $OD = |z_D| = |6i| = \sqrt{0^2+6^2} = \sqrt{36} = 6$

Distance entre deux points

Elle pourra s'exprimer à l'aide d'un module. On aura tout simplement : **AB** $= |z_B - z_A|$.
Mais attention à ne pas confondre avec $|z_B| - |z_A|$. Le module $|z_B - z_A|$ ***n'est pas égal à*** $|z_B| - |z_A|$.
Pour calculer le module $|z_B - z_A|$, on calcule la différence $z_B - z_A$, puis on calcule le module du résultat.

<u>Exemple</u> : avec $z_A = 7-i$ et $z_B = 4+6i$

On a $AB = |z_B - z_A| = |4+6i-(7-i)|$
$= |4+6i-7+i| = |-3+7i|$

Donc on a $AB = |-3+7i| = \sqrt{(-3)^2+7^2} = \sqrt{9+49}$

On obtient $AB = \sqrt{58}$

Remarques

Le module $|z - 3i|$ représente la distance AM entre un point M d'affixe z et un point A d'affixe $3i$.
On a bien $|z - 3i| = |z_M - z_A| =$ AM.
Le module $|z - 5 + 2i|$ représente la distance BM entre un point M d'affixe z et un point B d'affixe $5 - 2i$.
En effet, on a $|z - 5 + 2i| = |z - (5 - 2i)| = |z_M - z_B| =$ BM.
Il faut en fait bien tenir compte du signe " - " de la formule générale afin de donner des affixes correctes.

Comment calculer une distance avec le module : application

Dans de très nombreux exercices du Bac concernant les nombres complexes, on a besoin de *calculer la distance entre deux points*. Cela nous permettra de montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral, qu'un quadrilatère est un losange, ou que plusieurs points sont sur un même cercle (si leur distance par rapport au centre est la même) ....

Exemple d'application

On considère les points A , B et C du plan ayant pour affixes respectives :

$z_A = -2+2i$; $z_B = 1-3i$; $z_c = 3+5i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

On calcule $AB = |z_B - z_A| = |1-3i-(-2+2i)|$

$\rightarrow AB = |3-5i| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

On calcule $BC = |z_C - z_B| = |3+5i-(1-3i)|$

$\rightarrow BC = |2+8i| = \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

On calcule $AC = |z_C - z_A| = |3+5i-(-2+2i)|$

$\rightarrow AC = |5+3i| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

Donc on a : $AB = AC \rightarrow$ triangle isocèle en A

et $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (car $\sqrt{68}^2 = \sqrt{34}^2 + \sqrt{34}^2$)

$\rightarrow$ triangle rectangle en A

(réciproque de Pythagore !)

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .

Remarque

Même si l'exercice nous donne des affixes complexes, nous pouvons utiliser la formule de la distance, apprise en Seconde, avec les coordonnées.

On obtientrait, bien sûr, le même résultat et les calculs se ressemblent d'ailleurs beaucoup !

Il faudra donc être très souple, et ne pas hésiter à passer d'un "environnement" à l'autre !!

Avec $z_A = -2+2i$, on a un point $A \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix}$

Avec $z_B = 1-3i$, on a un point $B \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix}$

On peut appliquer $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

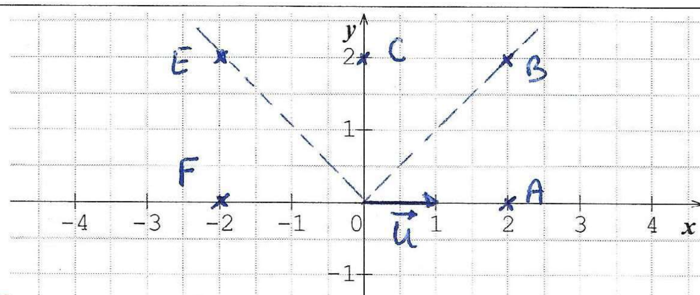
$\rightarrow AB = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$.

Argument d'un nombre complexe
Angle entre deux vecteurs

Définition de l'argument

Pour un nombre complexe, son ***argument*** est égal à *l'angle* orienté ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$), entre le vecteur unitaire de l'axe des abscisses $\vec{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$

Exemples



On a $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \arg(z_A) = 0 \quad [2\pi]$

On a $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

On a $(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \arg(z_C) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

On a $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$

On a $(\vec{u}, \overrightarrow{OF}) = \arg(z_F) = \pi \quad [2\pi]$

Expression de l'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$) entre un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur unitaire $\vec{u}$.

On a : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)$

Expression de l'angle ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) entre deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$

$= -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$

$= (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

$= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$

$\rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ $\boxed{\text{car } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2}$

Remarque : pour savoir calculer un argument, prenez la fiche "Comment obtenir l'écriture exponentielle d'un nombre complexe".

Comment obtenir l'écriture trigonométrique d'un complexe

Avant de voir l'écriture exponentielle d'un nombre complexe, il est souvent demandé (et utile) de savoir travailler sur son *écriture trigonométrique*. Ces deux écritures sont assez similaires, car elles nécessitent de connaitre le module et l'argument du nombre complexe.

L'écriture trigonométrique d'un nombre complexe z s'écrira :

$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ **, où r est le module de z et θ est son argument**

Pour obtenir cette écriture trigonométrique, il faudra respecter les deux étapes suivantes :

Etape 1 : on calcule le *module* du nombre complexe.

Etape 2 : on détermine la valeur de l'*argument*, en retrouvant l'angle à l'aide du cercle trigonométrique.

Exemple 1

On cherche l'écriture trigonométrique du nombre complexe $(3 - 3i)$

Etape 1 : on calcule le module de $3-3i$

→ on a $|3-3i| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $3-3i$

→ il vérifie $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{3}{\sqrt{18}}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{-3}{\sqrt{18}}$

On obtient : $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

On a donc : $3-3i = \sqrt{18}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Exemple 2

On cherche l'écriture trigonométrique du nombre complexe $(-6 + \sqrt{12}\,i)$

Etape 1 : on calcule le module de $-6+\sqrt{12}\,i$

→ on a $|-6+\sqrt{12}\,i| = \sqrt{(-6)^2+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $-6+\sqrt{12}\,i$

→ il vérifie $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{-6}{\sqrt{48}}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}}$

On obtient : $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ soit $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

On a donc : $-6+\sqrt{12}\,i = \sqrt{48}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Module et argument d'un nombre complexe
Propriétés

Les propriétés (essentielles) du module

Pour deux nombres complexes z et z' , on aura :
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et donc , par conséquent, $|z^n| = |z|^n$.
$|z : z'| = |z| : |z'|$

Par contre, $|z + z'|$ n'est pas égal à $|z| + |z'|$. Il faudra faire attention aux "fausses propriétés" !

Application : On donne $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 4-i$ et $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Pour calculer $|z|$, il serait fastidieux de calculer z avec la quantité conjuguée, puis le module du résultat.

→ on fait plutôt $|z| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

avec $|z_1| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ et $|z_2| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$

Donc on a $|z| = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\dfrac{13}{17}}$.

Les propriétés (essentielles) de l'argument

Pour deux nombres complexes z et z' , on aura :
$\boldsymbol{Arg(z \times z') = Arg(z) + Arg(z')}$ et donc , en conséquence, $\boldsymbol{Arg(z^n) = n \times Arg(z)}$.
$\boldsymbol{Arg(z : z') = Arg(z) - Arg(z')}$

Par contre, $Arg(z \times z')$ n'est pas égal à $Arg(z) \times Arg(z')$. Encore une "fausse propriété" !

Application : on donne $z = (1+i)^{2019}$ et on cherche $Arg(z)$.

On ne va certainement pas développer la puissance 2019 !!

→ on utilise $Arg\, z = Arg\,(1+i)^{2019} = 2019 \times Arg(1+i)$

avec $Arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

Donc on a $Arg\, z = 2019 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2019\pi}{4}$ $[2\pi]$

or la mesure principale de $\dfrac{2019\pi}{4}$ est $\dfrac{3\pi}{4}$

Donc on a : $Arg(1+i)^{2019} = \dfrac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Comment montrer que deux vecteurs sont orthogonaux

Dans de très nombreux exercices du Bac concernant, au départ, les nombres complexes, on a besoin de *montrer que deux vecteurs (ou deux côtés) sont orthogonaux*. Cela pourra nous permettre de montrer qu'un triangle est rectangle, qu'un quadrilatère est un rectangle ou un carré.
La méthode de calcul utilisant les arguments est à faire au moins une fois (comme application du cours) mais elle est fastidieuse et peu efficace (il faudra montrer que l'argument final est égal à $\frac{\Pi}{2}$).
Du coup, même si l'exercice nous donne des affixes complexes, je vous conseille d'utiliser la formule du produit scalaire, apprise en Première, avec les coordonnées (c'est bien plus efficace !).

Exemple d'application

On nous donne trois nombres complexes $z_A = 5 + i$, $z_B = 8 - 3i$ et $z_C = 11 + 5{,}5\,i$ qui sont les affixes de trois points A, B et C
On va montrer que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un angle droit (donc vecteurs orthogonaux).

En utilisant un calcul d'argument

On sait que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

or $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{11 + 5{,}5i - (5+i)}{8 - 3i - (5+i)} = \dfrac{6 + 4{,}5i}{3 - 4i}$

soit $\dfrac{(6 + 4{,}5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{18 + 24i + 13{,}5i + 18\boxed{i^2}}{9 + 12i - 12i - 16\boxed{i^2}} = \dfrac{37{,}5\,i}{25}$

avec $i^2 = -1$

Donc $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{37{,}5}{25}\,i$ → c'est un imaginaire pur, qui a donc un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

Donc on a bien $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

En utilisant le produit scalaire

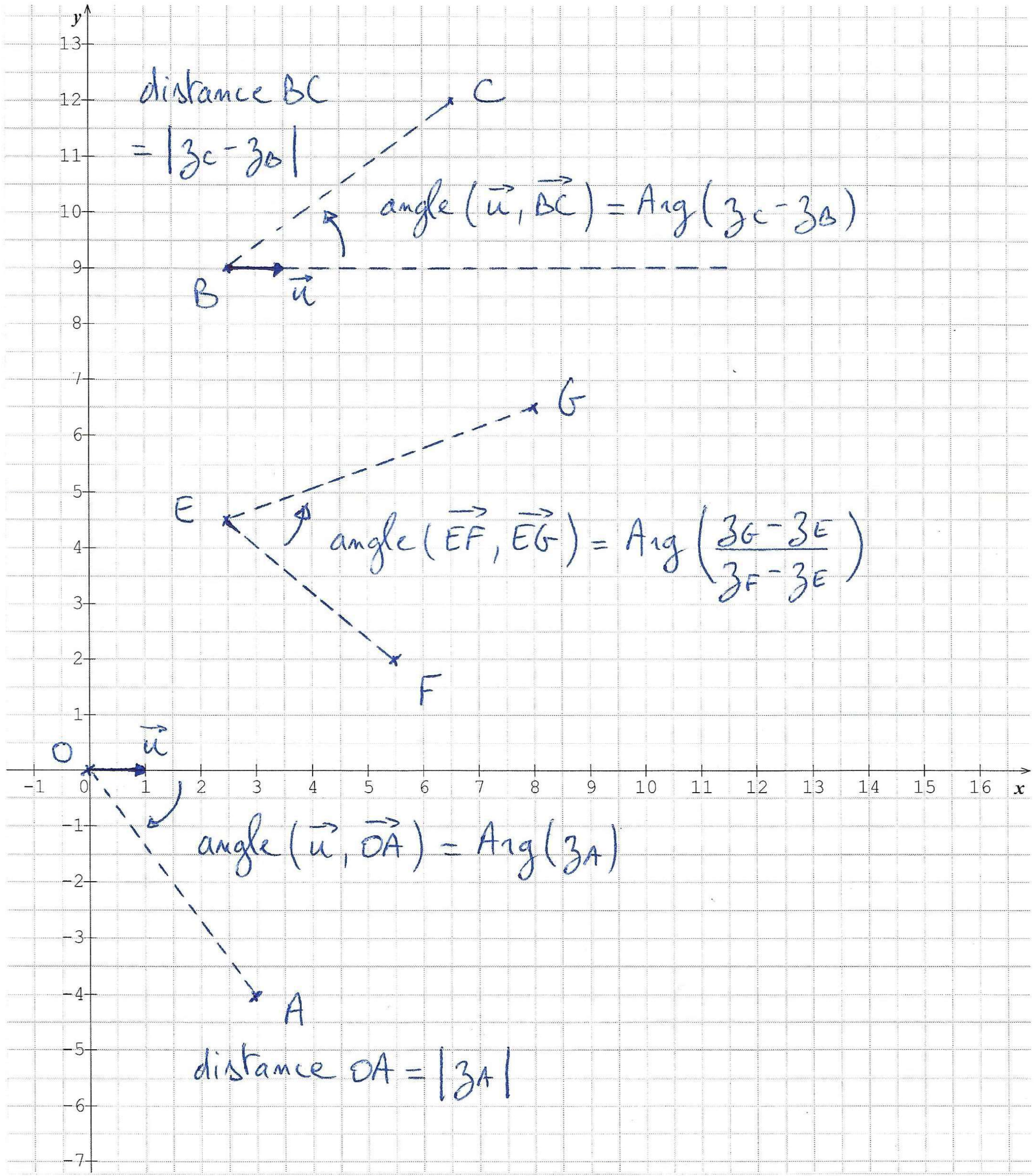
On écrit les coordonnées des points : $A\left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}8\\-3\end{matrix}\right.$ et $C\left|\begin{matrix}11\\5{,}5\end{matrix}\right.$

On calcule $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}8-5=3\\-3-1=-4\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}11-5=6\\5{,}5-1=4{,}5\end{matrix}\right.$

On obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 6 + (-4) \times 4{,}5 = 18 - 18 = 0$

Donc on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, soit $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Module et argument
Récapitulatif graphique



Les trois écritures possibles d'un nombre complexe

Il est fondamental de comprendre qu'un nombre complexe peut s'écrire sous trois formes possibles.
En apparence, ces trois formes seront "visuellement" différentes, mais elles seront bien sûr *égales entre elles* et correspondront au même nombre complexe.

La forme algébrique

Elle s'écrit à l'aide de deux nombres réels :

l'un représentant la *partie réelle* du nombre complexe (donc *l'abscisse* du point)
et l'autre la *partie imaginaire* du nombre complexe (donc *l'ordonnée* du point).

On a par exemple :

$$z_A = \underbrace{\boxed{3}}_{\text{partie réelle}} + \overbrace{\boxed{\sqrt{3}}}^{\text{partie imaginaire}}\, i$$

La forme exponentielle

Elle s'écrira également à l'aide de deux nombres :

l'un représentant le *module* du nombre complexe (donc la *distance* du point correspondant par rapport à l'origine du repère)
et l'autre représentant l'*argument* (donc l'*angle* par rapport à l'axe des abscisses)

Le même nombre complexe z_A pourrait s'écrire :

$$z_A = \underbrace{\boxed{2\sqrt{3}}}_{\text{module}}\, e^{i \overbrace{\boxed{\frac{\pi}{6}}}^{\text{argument}}}$$

La forme trigonométrique

C'est une variante de l'écriture exponentielle, qui utilise aussi le *module* et l'*argument*.
Elle utilise le fait que l'on a l'égalité $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Le même nombre complexe z_A pourrait s'écrire :

$$z_A = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Bilan

On a : $z_A = 3 + \sqrt{3}\, i = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Remarque

Le nombre complexe $z = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas une écriture exponentielle à cause du (-2) qui est négatif !

Comment obtenir l'écriture algébrique d'un nombre complexe

Pour passer d'une forme d'un nombre complexe à une autre, il y a certains changements qui sont faciles et qui ne doivent poser aucun souci. C'est ceux que l'on va voir ici !

Changement entre forme exponentielle et forme trigonométrique

Ces deux formes utilisent les mêmes éléments (module et argument).
Il est très facile de passer de l'une à l'autre car, entre les deux, c'est juste une histoire de présentation d'écriture.

On a : $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

Changement de la forme exponentielle (ou trigonométrique) vers la forme algébrique

Pour obtenir la forme algébrique, il suffira juste de bien connaitre les valeurs exactes de *cosinus* et de *sinus* (revoir le cercle trigonométrique de Première !), puis de développer avec le module.

On a : $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

Donc on a : $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

Quelques changements à connaitre par coeur

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\times 0 = -1 \rightarrow e^{i\pi} = -1$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\times 1 = i \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

<u>Application</u> : on peut transformer le nombre $-2e^{i\pi/4}$

On a : $-2e^{i\frac{\pi}{4}} = (-1)\times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi}\times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$

On obtient l'écriture exponentielle de $-2e^{i\frac{\pi}{4}}$ qui est égale à $2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Comment obtenir l'écriture exponentielle d'un nombre complexe

Après avoir vu, sur une fiche précédente, l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe, il est souvent plus utile de travailler avec son *écriture exponentielle*. Ces deux écritures restent très similaires, car elles nécessitent de connaitre le module et l'argument du nombre complexe.

L'écriture exponentielle d'un nombre complexe z s'écrira : $z = r\, e^{i\theta}$ **, où r est le module de z et θ est son argument**

Pour obtenir cette écriture exponentielle, il faudra respecter les deux étapes suivantes :

Etape 1 : on calcule le *module* du nombre complexe.

Etape 2 : on détermine la valeur de l'*argument*, en retrouvant l'angle à l'aide du cercle trigonométrique.

Exemple 1 : on cherche l'écriture *exponentielle* du nombre complexe ($3 - 3i$)

Etape 1 : on calcule le module de $3-3i$

$\rightarrow$ on a $|3-3i| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $3-3i$

$\rightarrow$ il vérifie $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{3}{\sqrt{18}}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{-3}{\sqrt{18}}$

On obtient : $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

On a donc : $3-3i = \sqrt{18}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Exemple 2 : on cherche l'écriture *exponentielle* du nombre complexe ($-6 + \sqrt{12}\, i$)

Etape 1 : on calcule le module de $-6+\sqrt{12}\, i$

$\rightarrow$ on a $|-6+\sqrt{12}\, i| = \sqrt{(-6)^2+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$

Etape 2 : on cherche un argument θ de $-6+\sqrt{12}\, i$

$\rightarrow$ il vérifie $\cos\theta = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{-6}{\sqrt{48}}$ et $\sin\theta = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}}$

On obtient : $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, soit $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

On a donc : $-6+\sqrt{12}\, i = \sqrt{48}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Ecriture exponentielle d'un complexe : applications

En utilisant les propriétés de l'exponentielle pour un produit ou un quotient

On donne deux nombres complexes $z_A = \sqrt{3} - i$ et $z_B = 1 + i$. On définit $z_C = z_A \times z_B$
Quelle est l'écriture exponentielle de z_C ?

On pourrait penser qu'il suffit de calculer z_C en multipliant z_A et z_B.
Mais le résultat obtenu ne nous permettra pas de trouver directement l'écriture exponentielle : le module serait pénible à calculer , mais surtout il parait impossible de retrouver l'angle correspondant à l'argument car $z_C = (\sqrt{3} - i) \times (1 + i) = \sqrt{3} + \sqrt{3}\, i - i - i^2 = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)\, i$.

La méthode consiste donc à déterminer l'écriture exponentielle de z_A et de z_B , puis à multiplier ces deux écritures exponenentielles entre elles.

On suppose avoir obtenu l'écriture exponentielle de z_A et de z_B

→ on a $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

On calcule alors :

$z_C = z_A \times z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \times 2 \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

soit $z_C = 4e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$

En utilisant les propriétés de l'exponentielle avec les puissances

On veut connaitre l'argument du nombre complexe $(1 + \sqrt{3}\, i)^{18}$
→ On ne va certainement pas développer directement cette puissance quand même !
La méthode consiste donc à déterminer l'écriture exponentielle de $1 + \sqrt{3}\, i$, puis on pourra alors appliquer la puissance à cette écriture exponentielle.

On suppose avoir obtenu l'écriture exponentielle de $1 + \sqrt{3}\, i$

→ on a $1 + \sqrt{3}\, i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a alors :

$(1 + \sqrt{3}\, i)^{18} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{18} = 2^{18} \times e^{i\frac{18\pi}{3}} = 2^{18} e^{i6\pi}$

or $e^{i6\pi} = \cos 6\pi + i \sin 6\pi = 1$

Donc on a : $(1 + \sqrt{3}\, i)^{18} = 2^{18}$ → c'est un réel !!

Exemple d'exercice mélangeant nombres complexes et suites géométriques

Dans de très nombreux exercices du Bac, on est amené à faire un lien entre les nombres complexes et les suites géométriques. On travaillera, dans ce cas, avec le *module* du nombre complexe.

Exemple d'application

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$z_0 = \sqrt{3} - i$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = (1 + i)\, z_n$
On pose alors $U_n = |z_n|$ et on va montrer que cette suite (U_n) est une suite géométrique.

Calcul de U_0

On a $U_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Expression de U_{n+1} *en fonction de* U_n

On a $U_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+i)z_n| = |1+i| \times |z_n|$

or $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

et $|z_n| = U_n$

On obtient donc : $U_{n+1} = \sqrt{2}\, U_n$

Conclusion pour la suite (U_n)

La suite (U_n) est donc une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $\sqrt{2}$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (U_n)

On sait que $U_n = U_0 \times q^{(n-0)}$

→ on obtient donc ici : $U_n = 2 \times (\sqrt{2})^n$