La définition d'un nombre complexe
Le nombre i

Point de départ

Le nombre i est un nombre *imaginaire*. Ce n'est pas un nombre *réel*, ce nombre i n'est égal à rien de "connu" jusque là.

Par contre , ce nombre i est défini par ***une égalité fondamentale*** : $\mathbf{i^2 = -1}$

Application : on part du nombre "i" qui est imaginaire.

On a donc $i^2 = -1$ et aussi $(-i)^2 = -1$

On aura ainsi : $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

Définition d'un nombre complexe

On appellera ***nombre complexe*** tout nombre s'écrivant sous la forme $z = a + i\,b$, où " a " et " b " sont des nombres ***réels***.

→ Cette écriture s'appelant alors la ***forme algébrique*** du nombre complexe.

→ Le nombre " a " s'appelle la ***partie réelle*** de ce nombre complexe, et se note $Re\,(z)$.

→ Le nombre " b " s'appelle la ***partie imaginaire*** de ce nombre complexe, et se note $Im\,(z)$.

Quelques pièges à éviter !

Dans le nombre complexe $z = 3 + 4\,i$, on dira bien que la partie imaginaire est égale à 4 et non pas à 4 i . On aura bien ici $Re\,(z) = 3$ et $Im\,(z) = 4$.

Si on nous donne un nombre complexe $z = 6\,i + 2$, il "faut" le réécrire dans le bon ordre sous la forme $z = 2 + 6\,i$. On aura bien ici $Re\,(z) = 2$ et $Im\,(z) = 6$.

Exemples :

avec $z = 6 - 2i$, on a $Re(z) = 6$ et $Im(z) = -2$

avec $z = 3 + i$, on a $Re(z) = 3$ et $Im(z) = 1$

avec $z = 7i - 4$, on a $Re(z) = -4$ et $Im(z) = 7$

avec $z = 5i$, on a $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 5$

avec $z = 7$, on a $Re(z) = 7$ et $Im(z) = 0$

Comment comprendre le lien entre les nombres complexes et les points du plan

Propriétés et définitions

- Tout nombre complexe peut être représenté par un point d'un plan.
- La ***partie réelle*** du nombre complexe correspond alors à l'***abscisse*** du point.
- La ***partie imaginaire*** du nombre complexe correspond alors à l'***ordonnée*** du point.

Le nombre complexe $z_A = 3 + 2i$ est l'affixe d'un point A de coordonnées $A \left| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right.$

Le nombre complexe $z_B = 1 - i$ est l'affixe d'un point B de coordonnées $B \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right.$

Le nombre complexe $z_C = 3i$ est l'affixe d'un point C de coordonnées $C \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right.$

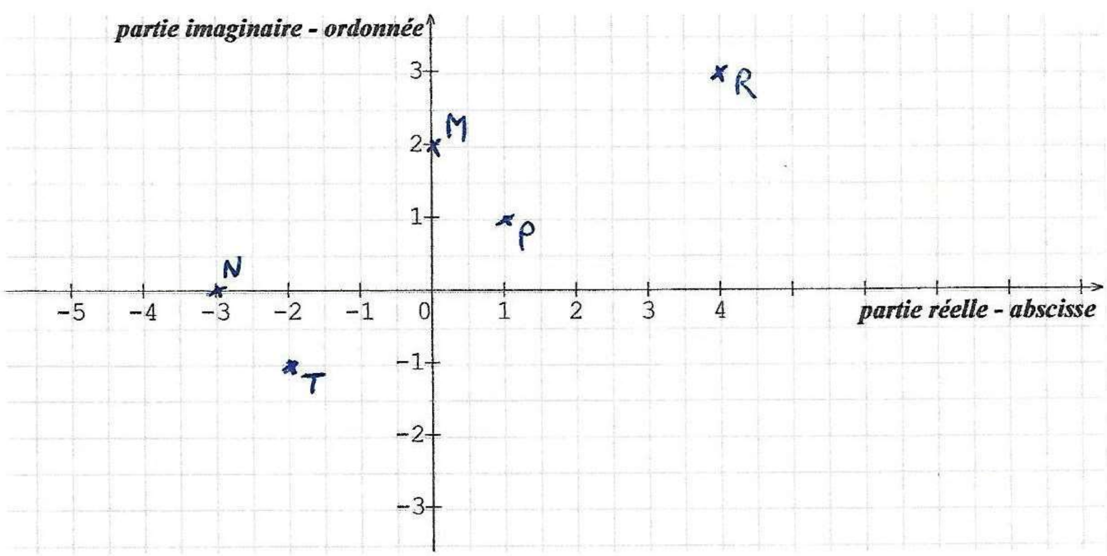
- Inversement, tout point du plan peut être repéré à l'aide d'un nombre complexe. Ce nombre complexe s'appellera alors l'***affixe*** du point correspondant

Le point $E \left| \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \right.$ aura pour affixe le nombre complexe $z_E = 4 + 5i$

Résumé

On va placer, dans le repère ci-dessous, quelques points dont les affixes sont égales à :

$z_R = 4 + 3i$; $z_T = -2 - i$; $z_M = 2i$; $z_N = -3$; $z_P = 1 + i$



Comment calculer avec les nombres complexes
(addition , soustraction et multiplication)

Les additions et les soustractions

Ce sont des opérations très simples. Il s'agira de *regrouper* ensemble les parties réelles et de regrouper ensemble les parties imaginaires, afin d'obtenir le résultat sous sa forme algébrique.

Exemples : avec $z_A = 3 + 4i$ et $z_B = 2 - 6i$

On a $z_A + z_B = 3 + 4i + 2 - 6i$
$= 3 + 2 + 4i - 6i = 5 - 2i$

On a $z_A - z_B = 3 + 4i - (2 - 6i)$
$= 3 - 2 + 4i + 6i = 1 + 10i$

Les multiplications

C'est un peu plus technique que l'addition et la soustraction. Il faut, au départ, simplement *développer*. Puis, on tient compte du fait que $i^2 = -1$. Enfin, on *regroupe* la partie réelle et la partie imaginaire.

Exemple 1 : avec $z_A = 3 + 4i$ et $z_B = 2 - 6i$

On a $z_A \times z_B = (3 + 4i) \times (2 - 6i)$

avec $i^2 = -1$

$= 6 - 18i + 8i - 24\boxed{i^2}$
$= 6 + 24 - 18i + 8i$
$= 30 - 10i$

Exemple 2 : avec $z_C = 1 + i$

On a $z_C^2 = (1 + i)^2$

avec $i^2 = -1$

$= 1 + 2i + \boxed{i^2}$
$= 1 - 1 + 2i = 2i$

On obtient $(1 + i)^2 = 2i$

Comment diviser des nombres complexes
Utilisation de la quantité conjuguée

Le conjugué d'un nombre complexe

Le *conjugué* d'un nombre z se note $\overline{z}$. Cela revient à *prendre l'opposé* de la partie *imaginaire*.
Donc on change tout simplement le signe de la partie imaginaire du nombre complexe !

Exemples

avec $z = a + ib \rightarrow$ son conjugué est $\overline{z} = a - ib$

avec $z = 3 + 4i \rightarrow$ son conjugué est $\overline{z} = 3 - 4i$

avec $z = 2 - 6i \rightarrow$ son conjugué est $\overline{z} = 2 + 6i$

avec $z = 3i \rightarrow$ son conjugué est $\overline{z} = -3i$

Division de deux nombres complexes

Piège à éviter : on ne peut pas directement diviser les parties réelles, et les parties imaginaires.

Le quotient $\dfrac{4+5i}{2+3i}$ n'est pas égal à $\dfrac{4}{2} + \dfrac{5}{3}i$

Pour bien faire apparaitre l'écriture algébrique d'un quotient, il faut faire impérativement "*disparaitre*" le nombre " i " du dénominateur.

La méthode consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par le ***conjugué du dénominateur*** (c'est la ***quantité conjuguée***) . On pourra ensuite bien séparer la partie réelle et la partie imaginaire.

Exemple : avec $z_A = 4 - i$ et $z_B = 2 - 3i$

On a $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{4-i}{2-3i} = \dfrac{(4-i)\times(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}$ quantitée conjuguée

On obtient : $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{8+12i-2i-3\boxed{i^2}}{4+6i-6i-9\boxed{i^2}}$ avec $i^2 = -1$

$= \dfrac{8+3+12i-2i}{4+9+6i-6i} = \dfrac{11+10i}{13}$

Donc $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{4-i}{2-3i} = \dfrac{11}{13} + \dfrac{10}{13}i$.

Comment résoudre des équations du premier degré

Résolution pour des équations en z

On résout ces équations comme on sait le faire avec la variable x. On isole donc tout simplement z, puis on conclut en exprimant le résultat sous sa *forme algébrique*, avec partie réelle et partie imaginaire (recours éventuel à la quantité conjuguée ...).

Exemple : on veut résoudre l'équation $2z + 3 = iz - 2 + i$

On résout $2z+3 = iz-2+i$

$\rightarrow 2z - iz = -3-2+i$

$\rightarrow (2-i)z = -5+i \quad \rightarrow z = \dfrac{-5+i}{2-i}$

On utilise alors la quantité conjuguée (avec $i^2=-1$) :

$$\frac{-5+i}{2-i} = \frac{(-5+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-10-5i+2i+i^2}{4+2i-2i-i^2} = \frac{-11-3i}{5}$$

On obtient la solution : $z = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}i$

Résolution pour des équations en $\overline{z}$

On résout l'équation avec la variable $\overline{z}$, comme si c'était z.

Une fois le résultat final obtenu pour $\overline{z}$, on obtient la solution pour z en prenant le conjugé de $\overline{z}$.

Exemple : on veut résoudre l'équation $1 - 2\overline{z} = 3i\overline{z} + 5 - i$

On résout $1-2\overline{z} = 3i\overline{z}+5-i$

$\rightarrow -2\overline{z} - 3i\overline{z} = -1+5-i$

$\rightarrow (-2-3i)\overline{z} = 4-i \quad \rightarrow \overline{z} = \dfrac{4-i}{-2-3i}$

On utilise alors la quantité conjuguée (avec $i^2=-1$) :

$$\frac{4-i}{-2-3i} = \frac{(4-i)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)} = \frac{-8+12i+2i-3i^2}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{-5+14i}{13}$$

On obtient la solution $\overline{z} = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{14}{13}i \rightarrow z = -\dfrac{5}{13} - \dfrac{14}{13}i$

Comment résoudre des équations avec z et $\bar{z}$

Résolution pour les équations en z et $\bar{z}$

La particularité de ce type d'équation sera qu'il est impossible en même temps z et $\bar{z}$.

La méthode consiste alors à remplacer le nombre z par sa forme algébrique $a + \mathrm{i}\, b$ et le nombre $\bar{z}$ par sa forme algébrique $a - \mathrm{i}\, b$.

On regroupe alors séparément la partie réelle et la partie imaginaire.

On obtient alors un système de 2 équations à 2 inconnues (qui sont alors bien réelles), que l'on résout pour trouver a et b.

Exemple : on veut résoudre l'équation $2z - 5i = i\bar{z} + 2$

On remplace z par $a+ib$ et $\bar{z}$ par $a-ib$.

On obtient : $2(a+ib) - 5i = i(a-ib) + 2$

$\rightarrow 2a + 2ib - 5i = ia - \boxed{i^2} b + 2$ avec $i^2 = -1$

$\rightarrow 2a - b - 2 + i(2b - 5 - a) = 0$

or, un nombre complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a - b - 2 = 0 \\ 2b - 5 - a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ -a + 2b = 5 \end{cases} \quad (\times 2) \text{ avec la méthode par combinaison}$$

$$\rightarrow \boxed{+} \begin{cases} 2a - b = 2 \\ -2a + 4b = 10 \end{cases}$$

$$3b = 12 \rightarrow b = 4$$

En remplaçant, on obtient $2a - 4 = 2$

soit $a = 3$.

Le système a donc pour solutions le couple $(3 ; 4)$.

$\rightarrow$ L'équation initiale a donc pour solution le nombre complexe $z = 3 + 4i$.

Comment résoudre une équation du second degré
Discriminant négatif

On a appris, en classe de première, que le nombre de solutions ***réelles*** pour une *équation du second degré* (avec un trinôme donc) dépendait du signe du *discriminant* Δ .
Si le discriminant était *positif* (> 0) , alors l'équation du second degré avait *DEUX* solutions réelles.
Si le discriminant était *nul* ($= 0$) , alors l'équation du second degré avait *UNE* solution réelle.
Si le discriminant était *négatif* (< 0) , alors l'équation du second degré *n'avait pas* de solution réelle.

La grande "nouveauté" est de découvrir qu'il existe en fait des solutions lorsque le discriminant est négatif , MAIS que ces solutions sont alors des nombres complexes ! Attention, les formules de Première restent valables et donnent des solutions réelles tant que le discriminant est positif ou nul.

Propriété et formules

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Si on a $\Delta < 0$, alors l'équation possède deux solutions complexes et conjuguées.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Application

On veut résoudre l'équation $2z^2 - 4z + 3 = 0$ $\longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$.

Donc l'équation possède deux solutions complexes

$$z_1 = \frac{-(-4) + i\sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{4 + i\sqrt{8}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_2 = \frac{-(-4) - i\sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{4 - i\sqrt{8}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Conséquence : on constate effectivement que les deux solutions sont conjuguées.

Remarque

Il faudra garder un oeil sur l'environnement dans lequel on cherche les solutions !
Si le problème posé consiste à trouver une distance, et que l'on obtient un discriminant négatif, on ne pourra pas conclure avec une distance égale à un nombre complexe !

Résoudre une équation du second degré
Application

De nombreux exercices de Terminale vont nous proposer de résoudre des équations du troisième degré ou, même, du quatrième degré.
Pour cela, on aura besoin de factoriser l'expression, en faisant apparaitre des trinômes du second degré.
La méthode la plus efficace est alors de développer une expression dans laquelle on pose des coefficients, que l'on déterminera en effectuant une identification terme à terme.

Un exemple : On considère l'équation (E) : $z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = 0$

Question 1 : Montrer qu'il existe et déterminer trois réels a , b et c tels que :

$$z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = (z - 3)(az^2 + bz + c)$$

On développe l'expression $(z-3)(az^2+bz+c)$.
On obtient : $az^3 + bz^2 + cz - 3az^2 - 3bz - 3c$
soit $az^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$
On identifie terme à terme avec $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
→ on obtient $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-5 \\ c-3b=11 \\ -3c=-15 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b-3=-5 \\ 5-3b=11 \\ c=5 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$

Question 2 : En déduire les solutions de l'équation (E).

On résout donc l'équation $(z-3)(z^2-2z+5)=0$
On obtient : $z-3=0$ ou $z^2-2z+5=0$
Pour $z-3=0$, on obtient $z=3$
Pour $z^2-2z+5=0$, on calcule $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times5$
→ on a $\Delta = -16 < 0$.
On obtient donc deux solutions complexes :
$z_1 = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i$ et $z_2 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$
Conclusion : l'équation (E) a trois solutions
$\{3 \,;\, 1+2i \,;\, 1-2i\}$