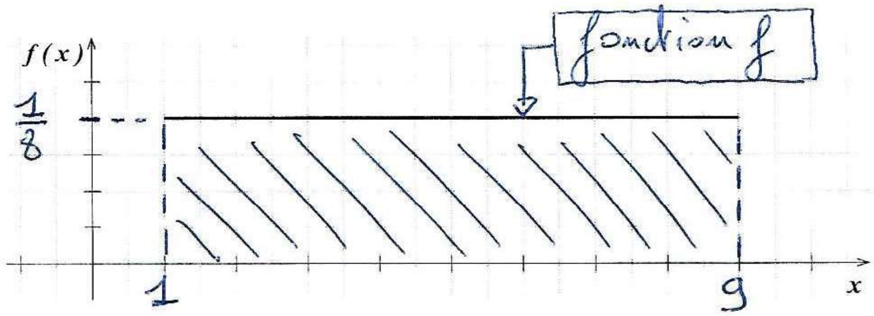
Les lois continues de probabilité : définition , propriété

Définition

Soit I un intervalle dont les bornes sont a et b (qui peuvent être éventuellement infini), on appelle *densité de probabilité* sur l'intervalle I toute fonction f ***continue et positive*** dont l'intégrale sur l'intervalle I est égale à 1 (ce qui correspond alors à 100 %).

Exemple

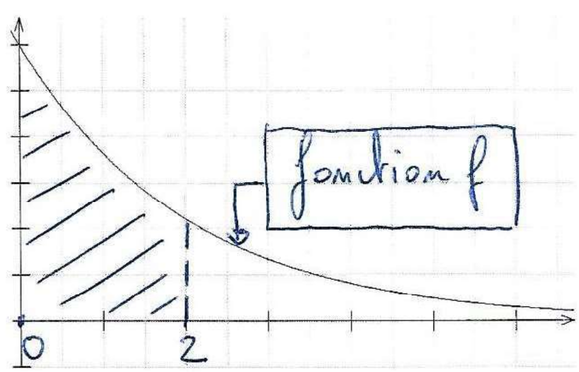


$$\text{On a } \int_1^9 f(x)\,dx = \text{Aire sous la courbe entre 1 et 9}$$
$$= \text{Aire du rectangle}$$
$$= 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

Donc f représente bien une densité de probabilité.

Propriété

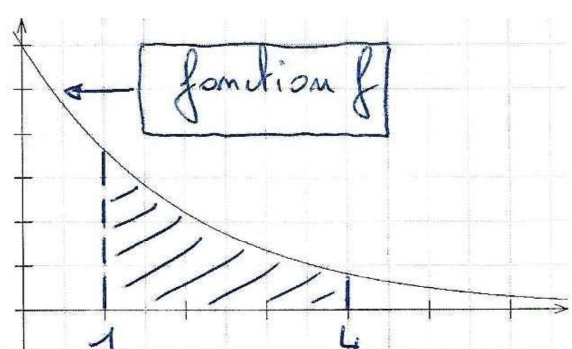
Si on a la représentation graphique d'une ***densité de probabilité***, alors on aura des ***liens fondamentaux*** à connaitre entre les ***probabilités***, les ***aires sous la courbe*** et les ***intégrales***.



On a : $P(x \leq 2)$

$= \text{Aire sous la courbe entre 0 et 2}$

$= \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$



On a : $P(1 \leq x \leq 4)$

$= \text{Aire sous la courbe entre 1 et 4}$

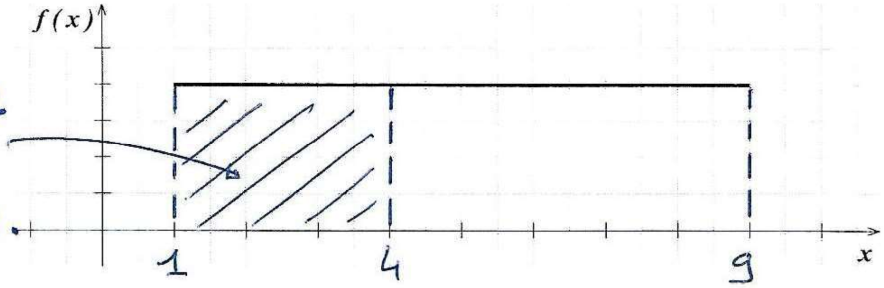
$= \displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$

Loi uniforme , exponentielle ou normale.
Comment les utiliser ?

La loi uniforme

La densité de probabilité sera une fonction définie par $f(x) = k$, où k est une constante.

On a $P(x \leqslant 4)$
$=$ Aire sous la courbe entre 1 et 4
$=$ Aire du rectangle.

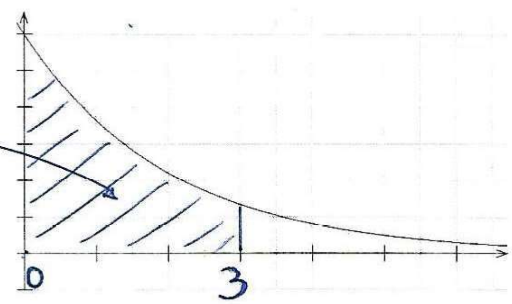


Pour calculer P (x < 4) , on pourra directement utiliser l'aire sous la courbe, c'est à dire .... l'AIRE d'un RECTANGLE ! C'est donc très facile !

La loi exponentielle

La densité de probabilité sera une fonction définie par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, où λ est un nombre réel.

On a $p(x \leqslant 3)$
$=$ Aire sous la courbe entre 0 et 3
$= \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$



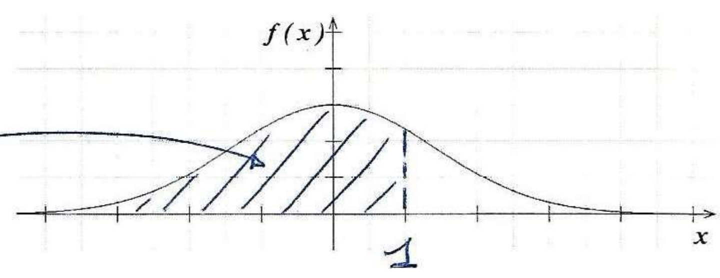
On ne pourra plus ici déterminer graphiquement l'aire sous la courbe de cette fonction.
Par contre, la densité de probabilité est une fonction exponentielle facile à intégrer.

Pour calculer P (x < 3) , on pourra soit calculer l'intégrale correspondante, soit avoir appris directement le résultat général du cours (je conseille en fait de maitriser les deux) .

La loi normale

La densité de probabilité sera une fonction s'écrivant sous la forme $e^{-x^2/2}$.

On a $p(x \leqslant 1)$
$=$ Aire sous la courbe entre $-\infty$ et 1
$\rightarrow$ CALCULATRICE



On ne pourra plus ici déterminer graphiquement l'aire sous la courbe, ni calculer l'intégrale correspondante (car la fonction $e^{-x^2/2}$ n'est pas intégrable à notre niveau de Terminale).

Pour calculer P (x < 1) , il nous restera ....il nous restera ... l'utilisation de la calculatrice, avec des touches spécifiques à bien connaitre !!

Pourquoi P (x = 4) = 0 pour une loi continue

On va considérer ici une *loi uniforme* qui correspond à un temps d'attente compris entre 2h et 8h.

Si on demande spontanément à quelqu'un, " combien vaut P (x = 4) ? ", il y a peu de chances qu'il réponde que cette probabilité soit égale à zéro !

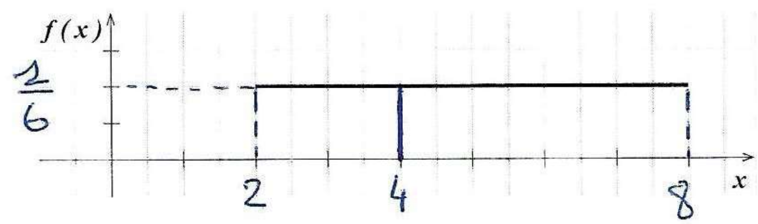
En effet, si on reformule la question , on aboutira à une phrase du type " ***quelle est la probabilité que le temps d'attente soit égale à 4 h ?*** ".
Il peut être alors difficile pour quelqu'un d'affirmer que cette probabilité est nulle , car cette personne se dira qu'il est possible d'attendre 4 h !
Cela peut apparaitre alors comme un petit paradoxe .... mais en fait, les mathématiques vont enlever toutes ambiguites !

Approche probabiliste

La probabilité cherchée P (x = 4) correspond à UN temps d'attente.
Or, entre 2 h et 8 h , ***puisque la loi est continue***, il y a une ***infinité*** de temps d'attente possible : 4h , mais aussi 4h1min , mais aussi 4h1sec , mais aussi 4h1dixième de seconde .....
On a donc P (x = 4) = 0 , car on cherche la probabilité d'obtenir UN temps d'attente sur une INFINITE de temps d'attente possible !!

Approche graphique

Voici la représentation graphique de la densité de probabilité de cette loi uniforme.



Si on voulait déterminer la probabilité en utilisant une aire sous la courbe, alors on se retrouverait à calculer l'aire d'un simple segment . Donc cette aire est égale à 0 !

Conséquences

→ si la question est de " *calculer la probabilité que le temps d'attente soit égal à 4 h* "

on pourra écrire sans hésiter $P(x=4)=0$

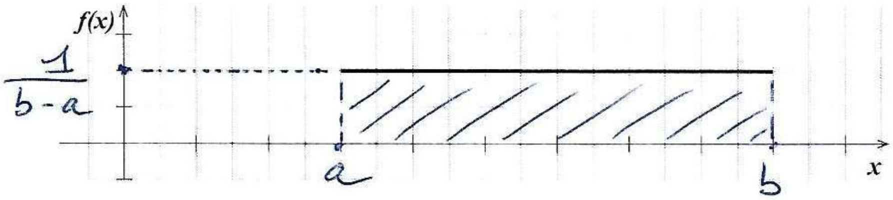
→ on ne fera aucune différence entre les symboles " *inférieur* $<$ " et " *inférieur ou égal* $\leqslant$ " .
Pour la seule fois dans votre vie des mathématiques,vous pouvez indifféremennt utiliser soit l'un, soit l'autre, puisque la notion de "égal à" amène une probabilité nulle avec les lois continues.
Les probabilités suivantes sont donc toutes parfaitement égales !

On a : $P(3 < x < 5)$
$= P(3 \leqslant x < 5)$
$= P(3 < x \leqslant 5)$
$= P(3 \leqslant x \leqslant 5)$

La loi uniforme : définition , espérance mathématique

Définition de la loi uniforme

La densité de probabilité d'une *loi uniforme* sera une fonction ***constante***, définie sur un intervalle fermé $[\ a\ ;\ b\ ]$ par $f(x) = k$, où k est un réel.



Or, pour que f soit bien une densité de probabilité, il faut que son intégrale entre a et b soit égale à 1 .
Cette intégrale correspond à l'aire sous la courbe entre a et b .
Et pour une *loi uniforme* , on se retrouve donc tout simplement à calculer une aire de rectangle.

La longueur du rectangle est égale à $(b-a)$.
Sa largeur doit être égale à $\frac{1}{b-a}$ pour que l'aire du rectangle soit égale à $(b-a) \times \frac{1}{b-a} = 1$.

Propriété : espérance mathématique d'une loi uniforme

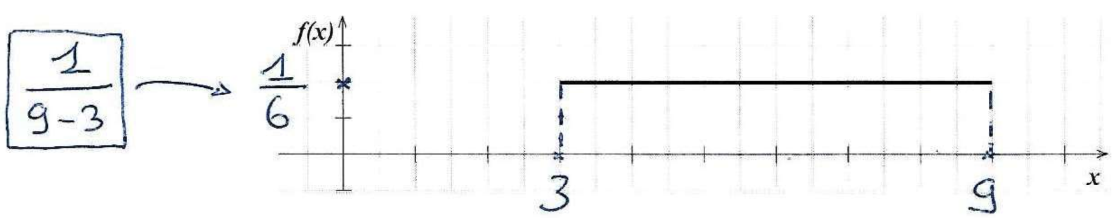
L'*espérance mathématiques* E (x) d'une *loi uniforme* définie entre a et b sera :

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

Cette ***espérance*** correspond donc à la ***moyenne*** des deux nombres a et b , ou à la moitié entre a et b .

Exemple

On considère une *loi uniforme* définie sur [3 ; 9]



→ La longueur du rectangle qui correspond à l'aire sous la courbe est égale à $(9-3) = 6$.
Donc sa largeur doit être égale à $\frac{1}{9-3} = \frac{1}{6}$ pour que l'aire soit bien égale à $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

→ L'*espérance mathématique* E (x) sera égale ici à :

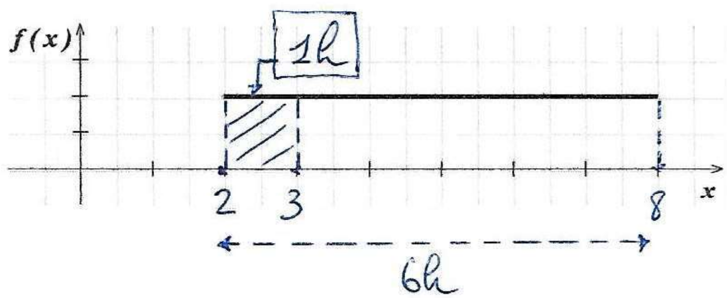
$$E(x) = \frac{3+9}{2} = 6 \ .$$

La loi uniforme : exemples de calcul de probabilité

On va considérer ici une *loi uniforme* qui correspond à un temps d'attente compris entre 2h et 8h.

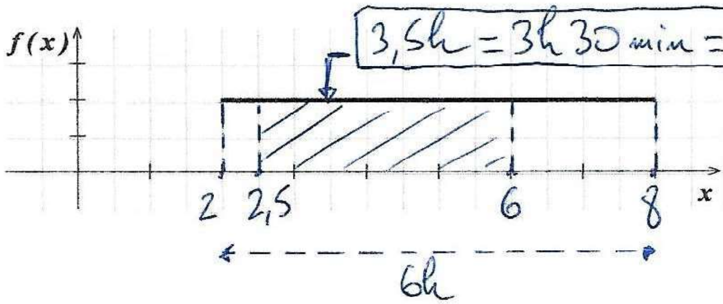
Je vais proposer une façon de voir très intuitive qui permet à beaucoup d'élèves d'être bien à l'aise avec cette *loi uniforme*.
Elle fait plus appel à un calcul direct de probabilités ($\dfrac{\text{temps d'attente demandé}}{\text{temps d'attente total}}$) qu'à un calcul d'aires.
La seule difficulté sera de ne pas s'embrouiller entre les minutes et les heures !!

On cherche P (x < 3) :
C'est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 3 h (soit implicitement compris entre 2 h et 3 h).



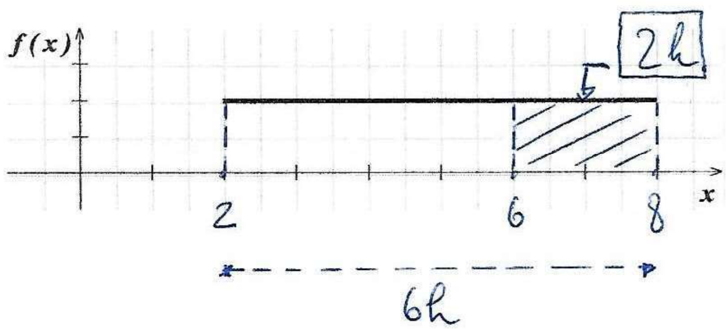
$$P(x<3)=P(2<x<3)=\frac{1h}{6h}=\frac{1}{6}$$

On cherche P (2,5 < x < 6) :
C'est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 2h30min et 6h (on fera bien attention au fait que 2,5 h = 2h30min).



$$P(2,5<x<6)=\frac{3,5h}{6h}\left(\text{ou } \frac{210\text{min}}{360\text{min}}\right)=\frac{7}{12}$$

On cherche P (x > 6) :
C'est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 6h (soit implicitement compris entre 6h et 8 h).



$$P(x>6)=P(6<x<8)=\frac{2h}{6h}=\frac{1}{3}$$

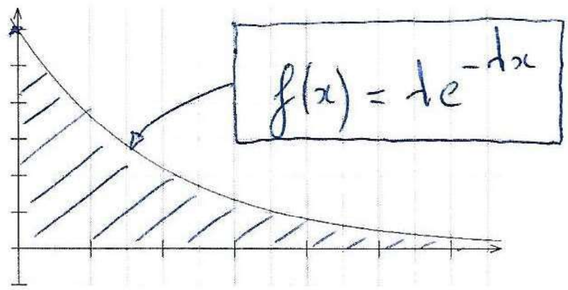
La loi exponentielle : définition , espérance

La loi exponentielle

La densité de probabilité d'une *loi exponentielle* sera une fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, où λ est un réel *strictement positif.*
Ce nombre λ s'appelle le ***paramètre*** de la loi exponentielle.

λ

Le paramètre λ correspond à l'ordonnée à l'origine



Vérification
Pour que f soit bien une densité de probabilité, il faut que son intégrale entre 0 et $+\infty$ soit égale à 1 .

On doit calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

Pour cela, on calcule $\int_0^{a} f(x)\,dx$ et on fait tendre le nombre a vers $+\infty$.

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right)$$

$-e^{-\lambda x}$ est une primitive de $\lambda e^{-\lambda x}$

$\lim\limits_{a \to +\infty} e^{-\lambda a} = 0$

$e^{-\lambda \times 0} = e^{-0} = 1$

$\to$ on a bien $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Espérance mathématique d'une loi exponentielle

L'*espérance mathématiques* E (x) d'une *loi exponentielle* définie entre 0 et $+\infty$ sera :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$\to$ si on connait $\lambda = 0{,}05$ alors on aura $E(x) = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$

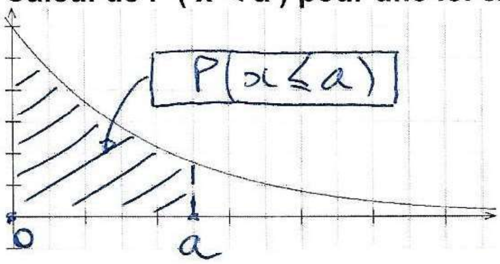
$\to$ si on connait $E(x) = 50$ alors on aura : $50 = \dfrac{1}{\lambda}$, c'est à dire $\lambda = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$

La loi exponentielle : comment calculer une probabilité

Préambule : il faut maitriser la formule suivante

Une *primitive* de $f\,(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est égale à $F\,(x) = -\,e^{-\lambda x}$

Calcul de P (x ⩽ a) pour une loi exponentielle



$$P(x \leq a) = \int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0)$$

$$\rightarrow P(x \leq a) = -e^{-\lambda a} - (-e^{-\lambda \times 0})$$

$$= -e^{-\lambda a} + 1$$

Conclusion : on aura P (x ⩽ a) = 1 - $e^{-\lambda a}$

Application : on calcule P ($x \leqslant 5$) pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}4$

→ on peut retrouver le résultat précédent en (re)calculant l'intégrale entre 0 et 5.

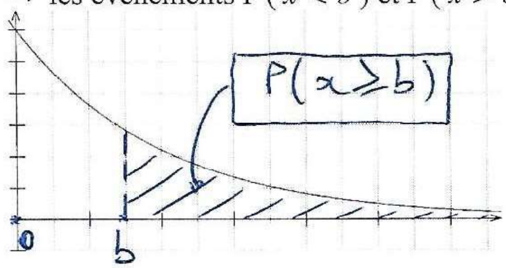
→ on peut apprendre et appliquer directement la formule.

En fait, je vous conseille de maitriser les deux façons de faire car on sera amené, suivant les consignes du Bac, à retrouver le résultat par intégration ou à appliquer directement la formule.

On a : $P(x \leq 5) = 1 - e^{-0{,}4 \times 5} = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865$

Calcul de P (x ⩾ b) pour une loi exponentielle

→ les événements P ($x \leqslant b$) et P ($x \geqslant b$) sont des ***événements contraires***.



$$P(x \geq b) = 1 - P(x \leq b)$$

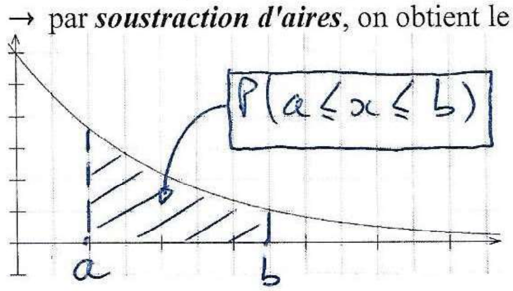
$$= 1 - (1 - e^{-\lambda b})$$

$$= e^{-\lambda b}$$

Conclusion : on aura P (x ⩾ b) = $e^{-\lambda b}$

Calcul de P (a ⩽ x ⩽ b) pour une loi exponentielle

→ par ***soustraction d'aires***, on obtient le résultat suivant : P ($a \leqslant x \leqslant b$) = P ($x \leqslant b$) - P ($x \leqslant a$)



$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a)$$

$$= 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a})$$

$$= 1 - e^{-\lambda b} - 1 + e^{-\lambda a}$$

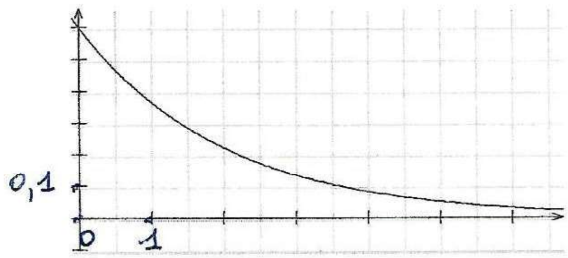
$$= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Conclusion : on aura P (a ⩽ x ⩽ b) = $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Comment retrouver la valeur du paramètre λ

Parfois, l'énoncé d'un exercice ne nous donne pas la valeur du paramètre λ d'une loi exponentielle. Rassurez vous, il est très simple de retrouver cette valeur. L'énoncé nous donnera une indication qui nous permettra d'appliquer un des raisonnements suivants.

On connait la courbe et son ordonnée à l'origine



L'ordonnée à l'origine de la densité de probabilité est égale à 0,6.
Donc on a $\lambda = 0,6$.

On connait l'espérance (ou la moyenne) de la loi exponentielle

Extrait du bac :
Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

On sait que $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

On remplace et on obtient : $10\,000 = \dfrac{1}{\lambda}$

On obtient donc : $\lambda = \dfrac{1}{10\,000} = 0,0001$

On connait une valeur de probabilité

Extrait du bac :
La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,6$.
Déterminer la valeur du paramètre λ à 0,001 près.

On sait que $P(T \leq 7) = 1 - e^{-\lambda \times 7}$

$\rightarrow$ on résout l'équation $1 - e^{-7\lambda} = 0,6$

soit $e^{-7\lambda} = 0,4 \rightarrow -7\lambda = \ln 0,4$

On obtient donc : $\lambda = \dfrac{\ln 0,4}{-7} \approx 0,131$

Le principe du non vieillissement de la loi exponentielle

Le principe général

Tout d'abord, ce *principe du non viellissement* ne concerne bien que la *loi exponentielle*.
Ensuite, il doit être ***appris***, car il restera toujours difficile de bien le mettre en lien avec notre perception du quotidien.

Exemple : considérons une ampoule dont la variable aléatoire étudiée est une durée de vie (en heures) qui suit une loi exponentielle.

Si on nous demande de calculer la probabilité que sa durée de vie dépasse 600 heures
Alors on cherche $P(x \geqslant 600)$

Mais, ***si on nous indique que l'ampoule fonctionne toujours au bout de 400 h,*** et que l'on cherche la probabilité que sa durée de vie dépasse 600 heures
Alors on cherche $P_{x \geqslant 400}(x \geqslant 600)$

DONC, on est dans le cadre d'une probabilité conditionnelle. C'est la probabilité de "*fonctionner après 600 h*" ***sachant que*** "*l'ampoule fonctionne toujours après 400 h*".
La *loi de non vieillissement* va nous amener à repartir "***de zéro***" à partir de 400 h, et donc il restera 200 h jusqu'à atteindre 600 h de fonctionnement.
On aura :

$$P_{x \geqslant 400}(x \geqslant 600) = P(x \geqslant 200)$$

Des exemples de phrases rencontrées dans les exercices

→ Pour une loi exponentielle de paramètre 0,0001

Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

On a : $P_{t \geqslant 7000}(t \geqslant 12\,000) = P(t \geqslant 5\,000)$

$= e^{-0{,}0001 \times 5000} \approx 0{,}6065$

→ Pour une loi exponentielle de paramètre 0,099

On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

On a : $P_{t \geqslant 2}(t \geqslant 7) = P(t \geqslant 5)$

$= e^{-0{,}099 \times 5} \approx 0{,}6096$

Remarque

Pour parler du "*non vieillissement*", on peut aussi dire que la loi exponentielle est "*sans mémoire*" .

La loi normale : définition , propriétés , calculs.
Les intervalles 1-sigma , 2-sigma , 3-sigma.

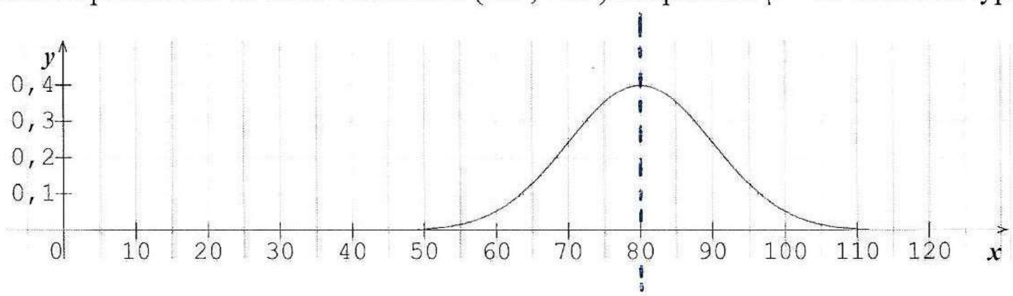
Définition

On notera N (μ ; σ^2) la loi normale ***d'espérance*** (ou de moyenne) μ et ***d'écart type*** σ .

Ainsi, la loi normale N (80 ; 100) correspond, en fait, à N (80 ; 10^2).
C'est donc une loi normale d'espérance $\mu = 80$ et d'écart type $\sigma = 10$.

Représentation graphique et propriétés

Voici la densité de probabilité de la loi normale N (80 ; 100) d'espérance $\mu = 80$ et d'écart type $\sigma = 10$.



→ La valeur de ***l'espérance*** (ou de la moyenne) est importante à plus d'un titre.

- la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale passant par cette espérance.
- le sommet de la courbe se trouve au niveau de cette espérance.

→ La valeur de ***l'écart type*** n'apparait pas directement sur la courbe.
Elle sera liée à des *intervalles* appelés ***1-sigma , 2-sigma , 3 sigma***.
Pour résumer, quelle que soit la loi normale, si on s'écarte de la moyenne, d'une valeur correspondante à *une fois* l'écart type (d'où le "1-sigma"), alors la probabilité sera toujours (environ) égale à 0,683.

On va illustrer les propriétés à l'aide de notre exemple

$P(\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma) \approx 0,683 \rightarrow P(70 \leq x \leq 90) \approx 0,683$

$P(\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma) \approx 0,954 \rightarrow P(60 \leq x \leq 100) \approx 0,954$

$P(\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997 \rightarrow P(50 \leq x \leq 110) \approx 0,997$

Calculs de probabilité

La densité de probabilité d'une loi normale est trop compliquée pour permettre un calcul d'aires ou d'intégrales. ***Il faudra donc juste savoir utiliser sa calculatrice pour calculer des probabilités*** !!
Attention ! Chaque calculatrice ayant ses spécificités, je vous conseille de bien mémoriser (ou de le noter même) les touches à utiliser sur VOTRE calculatrice (et vérifiez vos résultats avec les miens pour la loi normale N (80 ; 100) d'espérance $\mu = 80$ et d'écart type $\sigma = 10$).
Par exemple, avec la T I 83 Premium, il faut utiliser "Distrib" et "NormalFrep"

On vérifie que : $P(x \leq 65) \approx 0,0668$

$P(60 \leq x \leq 90) \approx 0,8186$

$P(x \geq 85) \approx 0,3085$

Comment calculer une probabilité avec la loi normale

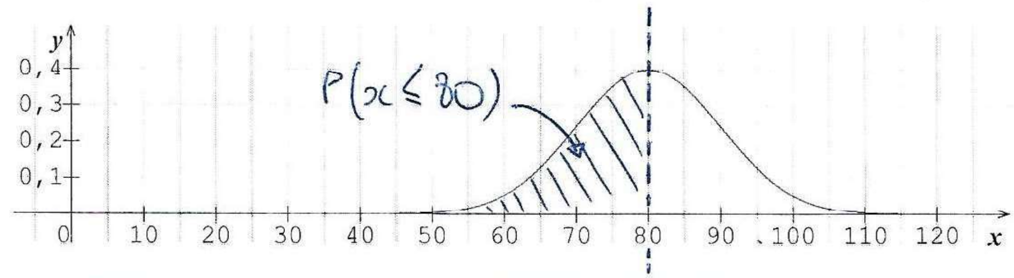
Nous allons voir ici que beaucoup de questions concernant la loi normale (ou la loi centrée réduite) peuvent être résolues avec des raisonnements "tout simple" sur les aires (par addition ou soustraction).

Les règles de base

Règle 1 : la totalité de l'aire sous la courbe (entre $-\infty$ et $+\infty$) est égale à 1.
Règle 2 : il y a un axe de symétrie verticale passant par l'espérance μ.
Cet axe coupe la courbe en deux parties égales. Donc l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et μ est égale à 0,5 car elle est égale aussi à l'aire sous la courbe entre μ et $+\infty$.
Règle 3 : l'axe de symétrie nous permet quantité de raisonnements et de calculs car les valeurs "à gauche" de cet axe se retrouve forcément "à droite".

Des exemples

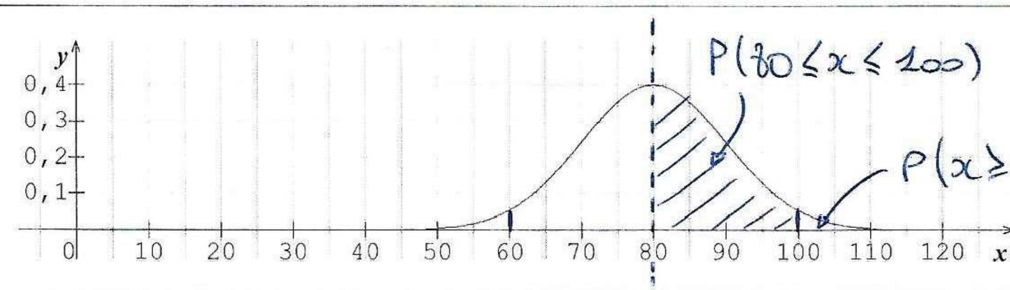
On va travailler ici avec une loi normale N (80 ; 100) d'espérance $\mu = 80$ et d'écart type $\sigma = 10$.



Un résultat très important par rapport à l'espérance (ou moyenne)

On a : $P(x \leq 80) = 0,5$ (avec la règle 2)

On aurait de même : $P(x \geq 80) = 0,5$



Un résultat qui utilise l'intervalle 2-sigma

On a $P(60 \leq x \leq 100) \simeq 0,954$

Donc, par symétrie, en raisonnant sur les aires

On a $p(80 \leq x \leq 100) = p(60 \leq x \leq 80) = \dfrac{0,954}{2} = 0,477$

On a $p(x \geq 100) = p(x \leq 60) = \dfrac{1-0,954}{2} = 0,023$

La loi normale centrée réduite

Définition

On notera N (0 ; 1) la *loi normale centrée réduite* ***d'espérance*** (ou de moyenne) $\mu = 0$ et ***d'écart type*** $\sigma = 1$ ($\rightarrow$ on peut vérifier que $\sigma^2 = 1^2 = 1$).

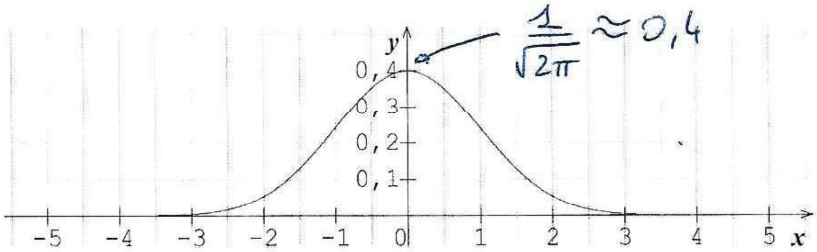
Règle fondamentale : lien avec les lois normales "classiques"

Toutes les lois normales peuvent être ramenées à la loi centrée réduite, avec un "*changement de variable*".

Si la variable x suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ alors la variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ suit la loi centrée réduite.

Représentation graphique et propriétés

Voici la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite N (0 ; 1).



$\rightarrow$ La valeur de ***l'espérance*** (ou de la moyenne) est importante à plus d'un titre.

- la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car l'espérance est égalc à 0.
- le sommet de la courbe se trouve au niveau de cette espérance. La valeur du maximum sera toujours égale à (environ) 0,4.

$\rightarrow$ La valeur de ***l'écart type*** n'apparait toujours pas directement sur la courbe.
Mais, cette fois, les valeurs de μ et de σ sont fixes et forcément connues ($\mu = 0$ et $\sigma = 1$).
On pourra donc écrire, sans souci, les intervalles appelés 1-sigma , 2-sigma , 3 sigma.

On a : $p(-1 \leq x \leq 1) \approx 0,683$
$p(-2 \leq x \leq 2) \approx 0,954$
$p(-3 \leq x \leq 3) \approx 0,997$

Calculs de probabilité

Si on sait utiliser SA calculatrice pour calculer des probabilités avec unc loi normale "classique", alors on sait l'utiliser pour la loi centrée réduite. Sauf que cette fois, on a forcément $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
*Pour mémoire, avec la T I 83 Premium, il faut utiliser **"Distrib"** et **"NormalFrep"**.*

On vérifie que : $P(x \leq 1,5) \approx 0,9332$
$P(-0,5 \leq x \leq 1) \approx 0,5328$
$P(x \geq 0,5) \approx 0,3085$

Comment passer à la loi centrée réduite
Pour retrouver μ ou σ

On pourrait parler d'un "*changement de variable*" et la consigne suivante est à bien travailler.
On y sait qu'une variable suit une *loi normale* dont on connait l'espérance μ mais pas l'écart type σ.
On veut obtenir une probabilité donnée pour un encadrement connu de la variable. On va alors passer d'une *loi normale* pour laquelle on ne peut pas utiliser la calculatrice (puisque l'on ne connait pas μ) à la ***loi centrée réduite*** pour laquelle on pourra utiliser la calculatrice (car on connait $\mu = 0$ et $\sigma = 1$).

Enoncé

La société "Bonne Mamie" utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture.
On note x la variable aléatoire qui, à chaque pot de confiture produit, associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes. Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que x suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart type σ .
Question : Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leqslant x \leqslant 127) = 0{,}68$

Solution

On part de : $P(123 \leq x \leq 127) = 0{,}68$

$\rightarrow P(123 - \mu \leq x - \mu \leq 127 - \mu) = 0{,}68$

$\rightarrow P\left(\dfrac{123-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{x-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{127-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}68$

$\rightarrow P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0{,}68$

on a remplacé μ par 125

avec $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ qui suit la loi normale centrée réduite

On utilise alors "InvNorm" ou "FracNorm" sur la calculatrice, avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

$\rightarrow$ on obtient $P(-0{,}994 \leq Z \leq 0{,}994) = 0{,}68$

soit $\dfrac{2}{\sigma} = 0{,}994 \rightarrow \sigma = \dfrac{2}{0{,}994}$

$\rightarrow \sigma \approx 2{,}012$

$\rightarrow \sigma \approx 2$ (à l'unité près)

Comment passer à une loi centrée réduite
Pour encadrer une variable avec une probabilité donnée

On pourrait parler d'un "*changement de variable*" et la consigne suivante est à bien travailler.
On y sait qu'une variable suit une *loi normale* dont on connait l'espérance μ et l'écart type σ.
La probabilité voulue est donnée et on veut obtenir un encadrement pour la variable. On pourrait donc penser qu'il suffit d'utiliser la calculatrice SAUF QUE le résultat affiché n'aurait aucun rapport avec la réponse à apporter. On doit en fait passer à la ***loi centrée réduite*** pour "recentrer" les calculs.

Enoncé

On note x la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que x suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.
Question : ***Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :***

$$P(85 - a \leqslant x \leqslant 85 + a) = 0,9$$

Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution

On va travailler avec $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{x-85}{2}$ qui suit la loi normale centrée réduite.

→ on utilise "InvNorm" ou "FracNorm" sur la calculatrice, avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

On obtient : $P(-1,645 \leq z \leq 1,645) = 0,9$

$\rightarrow P\left(-1,645 \leq \dfrac{x-85}{2} \leq 1,645\right) = 0,9$

$\rightarrow P(-1,645 \times 2 \leq x - 85 \leq 1,645 \times 2) = 0,9$

$\rightarrow P(\underbrace{-1,645 \times 2}_{} + 85 \leq x \leq \underbrace{1,645 \times 2}_{} + 85) = 0,9$

cela correspond à la valeur de $-a$

cela correspond à la valeur de a

On obtient donc : $a = 1,645 \times 2 = 3,29$

On vérifie que la variable x donne bien

$P(85 - 3,29 \leq x \leq 85 + 3,29) = 0,9$

soit $P(81,71 \leq x \leq 88,29) = 0,9$

Conséquence : ce résultat signifie que 90 % des tablettes commercialisées ont une teneur en cacao qui se situe autour de la moyenne entre 81,71 (soit 81,71 % de cacao) et 88,29 (soit 88,29 % de cacao).