Exemple d'exercice mélangeant nombres complexes et suites géométriques

Dans de très nombreux exercices du Bac, on est amené à faire un lien entre les nombres complexes et les suites géométriques. On travaillera, dans ce cas, avec le *module* du nombre complexe.

Exemple d'application

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$z_0 = \sqrt{3} - i$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = (1 + i) z_n$
On pose alors $U_n = |z_n|$ et on va montrer que cette suite (U_n) est une suite géométrique.

Calcul de U_0

On a $U_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Expression de U_{n+1} en fonction de U_n

On a $U_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+i)z_n| = |1+i| \times |z_n|$

or $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

et $|z_n| = U_n$

On obtient donc : $U_{n+1} = \sqrt{2}\, U_n$

Conclusion pour la suite (U_n)

La suite (U_n) est donc une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $\sqrt{2}$

Utilisation de la formule des suites géométriques pour la suite (U_n)

On sait que $U_n = U_0 \times q^{(n-0)}$

→ on obtient donc ici : $U_n = 2 \times (\sqrt{2})^n$