

## Ecriture exponentielle d'un complexe : applications

### En utilisant les propriétés de l'exponentielle pour un produit ou un quotient

On donne deux nombres complexes  $z_A = \sqrt{3} - i$  et  $z_B = 1 + i$ . On définit  $z_C = z_A \times z_B$   
Quelle est l'écriture exponentielle de  $z_C$  ?

On pourrait penser qu'il suffit de calculer  $z_C$  en multipliant  $z_A$  et  $z_B$ .

Mais le résultat obtenu ne nous permettra pas de trouver directement l'écriture exponentielle : le module serait pénible à calculer, mais surtout il paraît impossible de retrouver l'angle correspondant à l'argument car  $z_C = (\sqrt{3} - i) \times (1 + i) = \sqrt{3} + \sqrt{3}i - i - i^2 = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$ .

La méthode consiste donc à déterminer l'écriture exponentielle de  $z_A$  et de  $z_B$ , puis à multiplier ces deux écritures exponentielles entre elles.

On suppose avoir obtenu l'écriture exponentielle de  $z_A$  et de  $z_B$   
 $\rightarrow$  on a  $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$  et  $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

On calcule alors :

$$z_C = z_A \times z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \times 2 \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{soit } z_C = 4e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$$

### En utilisant les propriétés de l'exponentielle avec les puissances

On veut connaître l'argument du nombre complexe  $(1 + \sqrt{3}i)^{18}$

$\rightarrow$  On ne va certainement pas développer directement cette puissance quand même !

La méthode consiste donc à déterminer l'écriture exponentielle de  $1 + \sqrt{3}i$ , puis on pourra alors appliquer la puissance à cette écriture exponentielle.

On suppose avoir obtenu l'écriture exponentielle de  $1 + \sqrt{3}i$

$$\rightarrow \text{on a } 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On a alors :

$$(1 + \sqrt{3}i)^{18} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{18} = 2^{18} \times e^{i\frac{18\pi}{3}} = 2^{18} e^{i6\pi}$$

$$\text{or } e^{i6\pi} = \cos 6\pi + i \sin 6\pi = 1$$

$$\text{Donc on a : } (1 + \sqrt{3}i)^{18} = 2^{18} \rightarrow \text{c'est un réel !!}$$