Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac S

Métropole juin 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 :

Partie A : ① ⓐ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = -\infty \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ⓑ on calcule $f'(x)$

$\rightarrow f'(x) = 0 - \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

or $x \in [0 ; +\infty[$, donc $e^{x} \geq 1$ et $e^{-x} \leq 1$

Donc $e^{x} - e^{-x} \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[0 ; +\infty[$

$\rightarrow$ La fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$

ⓒ on reconnait l'utilisation du TVI

x	0	$+\infty$
variations de f	$f(0) = \frac{5}{2}$ ↘	$-\infty$

La fonction f est continue et ↘ sur $[0 ; +\infty[$

On a : $f(0) = \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

et le nombre 0 appartient à l'intervalle image $]-\infty ; \frac{5}{2}]$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$

② On a $f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = f(x)$

Donc on a $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$ avec $-\alpha \in]-\infty ; 0]$.

Partie B : ① Cette hauteur est $f(0) = \frac{5}{2} = 2{,}5$ m

② ⓐ On a $1 + (f'(x))^{2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\right)^{2}$

$\rightarrow 1 + (f'(x))^{2} = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$

or on a aussi $\frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})^{2} = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$

CQFD

① $I = \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}\,dx = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx$

soit $I = \left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}(e^0-e^{-0})$

$\rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$

La longueur de l'arceau est égale à $2I \rightarrow e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.

<u>Partie C</u> :

① On fait le lien avec les aires sous la courbe !

Et, pour raison de symétrie, $\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

$\rightarrow$ Aire $_{\text{Façade Nord}} = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 2\times\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

$\rightarrow$ pour la façade Sud, il faudra enlever les $2\,m^2$ de la porte

soit $A = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$

② Pour l'aire totale de la bâche, il faut rajouter les 3 parties rectangulaires du dessus, qui sont en lien avec la longueur des arceaux.

$\rightarrow$ Aire $_{\text{dessus serre}}$ = (longueur arceau × 1,50m) × 3

il y en a 3

$= 4{,}5(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$

Donc Aire totale $= 4{,}5(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) + 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$

or on a : $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right)dx$

$= \left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]_0^{\alpha}$

$= \frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$

Au final, en prenant $\alpha \approx 1{,}92$, on obtient une aire totale environ égale à 41,57 soit $42\,m^2$.

Exercice 2 :

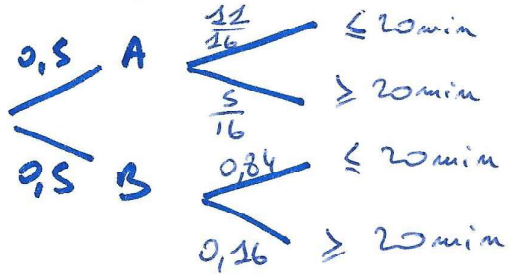
Partie A : ① ⓐ on travaille ici avec une loi uniforme

$$\rightarrow E(X_A) = \frac{9+25}{2} = 17 \text{ min}$$

ⓑ on travaille ici avec une loi normale $\rightarrow$ la moyenne correspond à l'axe de symétrie !

$$\rightarrow E(X_B) = 17 \text{ min}.$$

② on peut utiliser un arbre de probabilité



Pour la loi uniforme, on a :

$$P(X_A < 20) = \frac{20-9}{25-9} = \frac{11}{16}$$

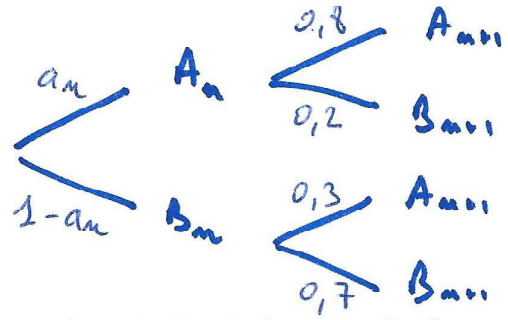
Pour la loi normale, on a :

$$P(X_B \leq 20) \approx 0,84$$

On obtient : $P(\leq 20\text{min}) = 0,5 \times \frac{11}{16} + 0,5 \times 0,84$

$$\approx 0,76$$

Partie B : ① ⓐ



ⓑ Avec la formule des probabilités totales, on a :

$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n + A_{n+1})$$

$$= 0,8 \times a_n + (1-a_n) \times 0,3$$

$$= 0,8a_n + 0,3 - 0,3a_n = 0,5a_n + 0,3$$

② ⓐ Init $a_1 = 0,5 \rightarrow$ on a bien $0 \leq a_1 \leq 0,6$

Hérédité On suppose que l'on a $0 \leq a_n \leq 0,6$

$$\rightarrow 0 \leq 0,5a_n \leq 0,3$$

$$\rightarrow 0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,6$$

on obtient donc : $(0 \leq) 0,3 \leq a_{n+1} \leq 0,6$

CQFD

ⓑ on calcule $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n$

$= -0,5a_n + 0,3$

$= -0,5(a_n - 0,6)$

or, pour tout $n \geq 1$, on a : $a_n \leq 0,6$

Donc $a_n - 0,6 \leq 0 \rightarrow -0,5(a_n - 0,6) \geq 0$

Donc $a_{n+1} - a_n \geq 0 \rightarrow (a_n)$ est croissante

ⓒ La suite est croissante et majorée (par 0,6).

Donc elle converge.

Et sachant que $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$, sa limite ℓ vérifiera $\ell = 0,5\ell + 0,3 \rightarrow$ on obtient $\ell = 0,6$

$\boxed{3}$ ⓐ raisonnement tellement classique !!

On a : $U_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$

$= 0,5a_n + 0,3 - 0,6$

$= 0,5(U_n + 0,6) + 0,3 - 0,6$

$= 0,5U_n$

$\rightarrow (U_n)$ est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $U_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$

ⓑ On a donc $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ ⚠

$= (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$

et $a_n = U_n + 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$

ⓒ On a : $-1 < 0,5 < 1 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} = 0 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$

$\rightarrow$ cette limite ne dépend pas du choix de "a".

ⓓ On aura, à terme, pour un très grand nombre de parties, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,4$

$\rightarrow$ le joueur verra plus souvent le type A.

Exercice 3 :

AFFIRMATION 1 :

on commence par résoudre l'équation !

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 < 0$

Les solutions complexes sont :

$z_A = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{4}i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} - i$

Puis on calcule les longueurs OA, OB et AB.

$OA = |z_A| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$OB = |z_B| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} + i)| = |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

Donc $OA = OB = AB \rightarrow ABO$ est équilatéral $\boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 2 :

on cherche l'écriture exponentielle de u !

On a : $u = \sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$

Donc $u^{2019} + \bar{u}^{2019} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019}$

$= 2^{2019} e^{i\frac{2019\pi}{6}} + 2^{2019} e^{-i\frac{2019\pi}{6}}$

La mesure principale de $\frac{2019\pi}{6}$ est $\frac{3\pi}{6}$ (soit $\frac{\pi}{2}$)

Donc $u^{2019} + \bar{u}^{2019} = 2^{2019} \underbrace{e^{i\pi/2}}_{=i} + 2^{2019} \underbrace{e^{-i\pi/2}}_{=-i}$

$= 2^{2019}(i + (-i)) = 0$!! $\rightarrow \boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 3 :

on calcule $f_n'(x)$ avec $(uv)' = u'v + uv'$

$\rightarrow$ on a $f_n'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{e^{-nx+1}}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{(-ne^{-nx+1})}_{v'}$

$\rightarrow f_n'(x) = e^{-nx+1}(1 - nx)$

Le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $1 - nx$

On résout $1-mx=0 \rightarrow x=\frac{1}{m}$

on obtient donc :

x	0		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	

$\rightarrow$ il y a donc bien un maximum !! $\boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 4

on utilise le théorème des gendarmes !

on a : pour tout x, $-1 \leq \cos x \leq 1$

soit $-e^{-x} \leq \cos x\, e^{-x} \leq e^{-x}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x\, e^{-x} = 0$

On a bien une asymptote horizontale $\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 5

on obtient 15 en fin d'exécution

Donc on a $2^{15} > A$ (et $2^{14} \leq A$)

$\rightarrow$ on applique la fonction "ln"

on obtient $\ln 2^{15} > \ln A$

$\rightarrow 15 \ln 2 > \ln A$

ce qui contredit $15 \ln 2 \leq \ln A$

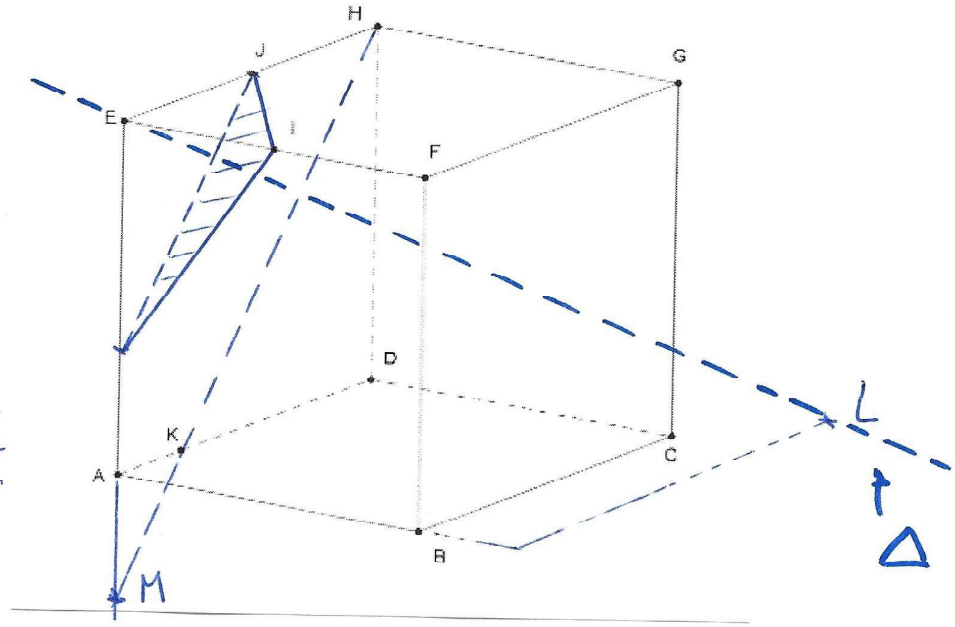
$\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

Exercice 4 :

Partie A :

① On obtient M

② Pour la section, on commence en traçant la parallèle à (HM) passant par J.



Partie B :

① ⓐ On a $F\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$ $H\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}$ $K\begin{vmatrix}0\\1/4\\0\end{vmatrix}$

et on veut montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (FHK)

On calcule $\vec{n}\begin{vmatrix}4\\4\\-3\end{vmatrix} \cdot \vec{FH}\begin{vmatrix}-1\\1\\0\end{vmatrix} = 4\times(-1)+4\times 1+(-3)\times 0 = 0$

et $\vec{n}\begin{vmatrix}4\\4\\-3\end{vmatrix} \cdot \vec{FK}\begin{vmatrix}-1\\\frac{1}{4}\\-1\end{vmatrix} = 4\times(-1)+4\times\frac{1}{4}+(-3)\times(-1) = 0$

ⓑ Les coordonnées de $\vec{n}$ correspondent donc aux valeurs a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$

→ on a : $4x+4y-3z+d=0$

or $F \in (FHK) \rightarrow 4\times 1+4\times 0-3\times 1+d=0 \rightarrow d=-1$

On obtient bien $4x+4y-3z-1=0$

ⓒ Le plan P est parallèle au plan (FHK)

Donc $\vec{n}$ est également un vecteur normal à P.

On a donc également : $4x+4y-3z+d'=0$

Mais le plan P passe par I → $4\times 0,5+4\times 0-3\times 1+d'=0$

soit $d'=1$ → on obtient $4x+4y-3z+1=0$

ⓓ raisonnement hyper classique !

On a $A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et $E \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \overrightarrow{AE} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Une équation paramétrique de (AE) sera $\begin{cases} x = 0 + 0k = 0 \\ y = 0 + 0k = 0 \\ z = 0 + 1k = k \end{cases}$

Donc, pour l'intersection avec P, on résout :

$$4 \times 0 + 4 \times 0 - 3 \times k + 1 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

On obtient donc $\Pi' \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{vmatrix}$

$\boxed{2}$ ⓐ Δ a un vecteur directeur colinéaire à $\vec{n}$ et elle passe par $E \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta \begin{cases} x = 0 + 4k' = 4k' \\ y = 0 + 4k' = 4k' \\ z = 1 - 3k' = 1 - 3k' \end{cases}$

ⓑ c'est le même raisonnement que le 1) d) !!

On résout : $1 - 3t = 0$ car une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$ (plan "horizontal").

On obtient : $t = \frac{1}{3}$ et donc $L \begin{vmatrix} 4 \times \frac{1}{3} = 4/3 \\ 4 \times \frac{1}{3} = 4/3 \\ 1 - 3 \times \frac{1}{3} = 0 \end{vmatrix}$

ⓒ La droite Δ passe par L et E $\rightarrow$ c'est (LE).

ⓓ On pourrait faire deux fois le raisonnement permettant d'étudier l'intersection de 2 droites $\rightarrow$ mais pour les droites Δ et (BF), il est évident qu'elles ne sont pas sécantes car la droite Δ correspond à (LE) et la droite (BF) est une arête "verticale" qui ne peut couper (LE).

→ pour les droites Δ et (CG), on va utiliser la méthode de cours.

On a : $\Delta \begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z = 1-3k \end{cases}$ et $(CG) \begin{cases} x = 1+0k' = 1 \\ y = 1+0k' = 1 \\ z = 1 \times k' = k' \end{cases}$

→ on résout le système $\begin{cases} 4k = 1 \\ 4k = 1 \\ 1-3k = k' \end{cases}$ $\begin{matrix} \to k = 1/4 \\ \\ \to k' = 1-3\times\frac{1}{4} \end{matrix}$

soit $k' = \frac{1}{4}$

Donc les droites Δ et (CG) sont sécantes :

elles se coupent au point $\left| \begin{matrix} 4\times 1/4 = 1 \\ 4\times 1/4 = 1 \\ 1-3\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{matrix} \right.$

Exercice de Spé :

Partie A : ① on calcule $6\times(-4)-(-5)\times 5 = -24+25 = 1$

Donc la matrice A appartient bien à S

② On veut $a\times d - 3\times 2 = 1$ soit $ad = 7$

et, avec des entiers relatifs, les solutions sont :

$\{1;7\}$ $\{-1;-7\}$

soit les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

③ a on veut $5x - 2y = 1$

et on a $\underline{5\times 1 - 2\times 2 = 1}$ (on soustrait les égalités)

soit $5(x-1) - 2(y-2) = 0$

$\rightarrow$ $5(x-1) = 2(y-2)$

En appliquant le théorème de Gauss, on sait que :

2 est un diviseur de $x-1$ $\rightarrow$ $x = 1+2k$

et on obtient alors $y = 2+5k$

Les solutions de (E) sont donc : $\{1+2k ; 2+5k\}$ $k\in\mathbb{Z}$

b on veut : $a\times 5 - 2\times b = 1$ soit $5a - 2b = 1$

et d'après le a, les matrices seront de la forme

$$\begin{pmatrix} 1+2k & 2+5k \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Partie B :

① on sait que $ad - bc = 1$

et par application du théorème de Bezout,

on sait que a et b sont premiers entre eux.

② on calcule $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+da \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ on obtient, avec $ad-bc=1$:

$AB = (ad-bc)\times I = 1\times I = I$

① on a donc $AB = BA = I$

Donc la matrice A est inversible, avec $A^{-1} = B$

② on a $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ on calcule $d \times a - (-b) \times (-c) = ad - bc = 1$

Donc A^{-1} appartient bien à S.

③ ⓐ On a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{A^{-1}A}_{I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Donc on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On en déduit : $\begin{cases} x = dx' - by' \\ y = ay' - cx' \end{cases}$

ⓑ on sait que $x = dx' - by'$ et $y = ay' - cx'$.

Donc Δ' le PGCD de x' et de y' est un diviseur de x et y

$\rightarrow$ Δ' est un diviseur de Δ

De même, puisque $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on sait que :

$x' = ax + by$ et $y' = cx + dy$

et donc, Δ le PGCD de x et de y est un diviseur de x' et y'

$\rightarrow$ Δ est un diviseur de Δ'

<u>conclusion</u> : Δ' divise Δ et Δ divise Δ' $\rightarrow$ $\Delta = \Delta'$

④ on a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$

D'après la question précédente, on montrerait de "proche en proche" que :

$PGCD(x_{n+1} ; y_{n+1}) = PGCD(x_n ; y_n) = \dots = PGCD(x_0 ; y_0)$

avec $2019 = 3 \times 673$ soit $PGCD(x_0 ; y_0) = 673$

et donc $PGCD(x_n ; y_n) = 673$.