Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac ES

Métropole juin 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 :

AFFIRMATION 1 : on cherche $P_E(\bar{R}) = \frac{P(E \cap \bar{R})}{P(E)}$

On a $P(E \cap \bar{R}) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$

et $P(E) = P(E \cap R) + p(E \cap \bar{R})$ (probabilités totales)

$= 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,2 = 0,34$

$\rightarrow P_E(\bar{R}) = \frac{0,06}{0,34} \approx 0,17$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 2 : L'espérance (ou moyenne) est égale à 12

Pour une loi UNIFORME, il faudra le même écart entre k et 12 qu'entre 12 et 18 $\rightarrow k = 6$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 3 :

On va utiliser : $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

et $\ln a^n = n \times \ln a$

On veut résoudre : $\ln x^2 - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5$

soit $2\ln x - 5\ln x + \underbrace{\ln e}_{1} + \cancel{\ln 2} = \cancel{\ln 2} + \ln x + 5$

soit $-4\ln x + 1 = 5$

soit $\ln x = -1$ ou $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 4 :

On a une tangente "horizontale" lorsque la dérivée f' s'annule.

D'après le tableau, il existe deux solutions pour $f'(x) = 0$

Donc f' s'annule deux fois $\rightarrow$ il y aura deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses (ou "horizontales") $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 5 :

f est convexe ssi f'' est positive ssi f' est croissante

D'après le tableau, c'est bien le cas sur $[5 ; 15]$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAI}}$

Exercice 2 :

1 a Une baisse de 4% amène une multiplication par le coefficient $\left(1-\frac{4}{100}\right)=0,96$

et on replante 22 pommiers → on ajoute 22

On obtient bien : $U_{n+1}=0,96\,U_n+22$

b pour 2020, on cherche U_2

on a $U_1=0,96U_0+22=0,96\times 300+22=310$

et $U_2=0,96U_1+22=0,96\times 310+22=319,6$

soit environ 320 pommiers en 2020.

2 a

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 300$
Tant que $U \leqslant 400$
  $N \leftarrow N+1$
  $U \leftarrow 0,96U+22$
Fin Tant Que

b On peut vérifier que $U_{12}\leqslant 400$ et $U_{13}>400$

→ on a donc $N=13$.

3 a On a ici un raisonnement hyper classique !

→ on a $V_{n+1}=U_{n+1}-550$

$=0,96U_n+22-550$

$=0,96(V_n+550)+22-550$

$=0,96V_n+\underbrace{0,96\times 550+22-550}_{=0}$

→ $V_{n+1}=0,96\,V_n$

→ (V_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $V_0=U_0-550=-250$

b On aura donc $V_n=V_0\times q^{(n-0)}=-250\times 0,96^n$

et $U_n=V_n+550=-250\times 0,96^n+550$

ou $U_n=550-250\times 0,96^n$

ⓒ pour 2025, on calcule U_7

$\rightarrow U_7 = 550 - 250 \times 0,96^7 \approx 362$

ⓓ on résout l'inéquation $U_n > 400$

soit $550 - 250 \times 0,96^n > 400$

soit $-250 \times 0,96^n > -150$

soit $0,96^n < \frac{-150}{-250}$ $\left(\frac{-150}{-250} = \frac{3}{5}\right)$

⚠

on applique alors la fonction "ln"

On obtient $\ln 0,96^n < \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

soit $n \times \ln 0,96 < \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

soit $n > \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln 0,96}$ ⚠ ($\ln 0,96$ est négatif)

$\approx 12,51$

La condition est donc vérifiée à partir du rang 13.

Exercice 3

Partie A : on travaille avec une loi NORMALE

① avec la calculatrice, $P(D \leq 8) \simeq 0,11$

② avec la calculatrice, $P(8 \leq D \leq 26) \simeq 0,85$

③ on doit reconnaitre un intervalle 2σ

car $\underbrace{15,5}_{\mu} + 2 \times \underbrace{6}_{\sigma} = 27,5$ et $\underbrace{15,5}_{\mu} - 2 \times \underbrace{6}_{\sigma} = 3,5$

Cela correspond à une probabilité égale à 0,954.

Partie B : on travaille ici avec une loi BINOMIALE

① on doit reconnaitre effectivement une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4} = 0,25$ (car on s'intéresse aux relevés de l'équipe de Sebastien).

② on calcule $p(X = 4) \simeq 0,15$ (avec binomFdp)

③ on calcule $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1)$

$\simeq 0,76$ (avec binomFRep)

Partie C : L'intervalle de confiance s'écrit

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

→ son amplitude est donc égale à $2 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$

→ on veut $\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,1$

soit $\sqrt{n} > \frac{2}{0,1}$ → $\sqrt{n} > 20$

→ $n > 400$

Donc il faudra, au minimum, 401 relevés.

Exercice 4 :

Partie A : on nous demande bien des lectures graphiques

① on aurait $f(0) \approx 115$

et $f(60) \approx 70$

② Le point A d'abscisse 7 est un point d'inflexion

$\rightarrow f''(7) = 0$

③ chaque rectangle a une aire égale à $10 \times 20 = 200$

On peut estimer l'aire en comptant les carreaux

→ on en compte environ 23 ou 23,5

→ cela amène une aire de $23 \times 200 = 4600$

ou de $23{,}5 \times 200 = 4700$

→ en tout cas, son estimation n'est pas correcte.

Partie B : ① on utilise $(uv)' = u'v + uv'$

→ on a $f'(x) = 0 + \underbrace{14}_{u'}\underbrace{e^{-\frac{x}{5}}}_{v} + \underbrace{(14x+42)}_{u} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}}}_{v'}$

soit $f'(x) = e^{-\frac{x}{5}}\left(14 - \frac{14x}{5} - \frac{42}{5}\right) = e^{-\frac{x}{5}}\left(\frac{70 - 14x - 42}{5}\right)$

→ on a bien $f'(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}(-14x + 28)$

② Le signe de $f'(x)$ dépend alors du signe de $-14x + 28$

x	0		2		60
signe de f'		+	0	−	
variations de f	$f(0) = 112$	↗	$f(2) \approx 117$	↘	70

on résout $-14x + 28 = 0$

soit $x = 2$

③ D'après le logiciel, on a $f''(x) = 14e^{-\frac{1}{5}x}\left(\frac{x-7}{25}\right)$

→ le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $(x - 7)$

On obtient :

x	0		7		60
signes de f''		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

point d'inflexion

④ ⓐ on calcule $G'(x)$ avec $(uv)' = u'v + uv'$

$\rightarrow$ on obtient $G'(x) = \underbrace{-70}_{u'} \times \underbrace{e^{-\frac{x}{5}}}_{v} + \underbrace{(-70x-560)}_{u} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}}}_{v'}$

$\rightarrow G'(x) = e^{-\frac{x}{5}}\left(-70 + \frac{70x}{5} + \frac{560}{5}\right)$

$\rightarrow G'(x) = e^{-\frac{x}{5}}(-70 + 14x + 112) = e^{-\frac{x}{5}}(14x + 42)$

Donc G est bien une primitive de g (car $G'(x) = g(x)$)

ⓑ On a $f(x) = 70 + g(x)$

Donc une primitive de f sera donnée par $F(x) = 70x + G(x)$

ⓒ on a $\int_0^{60} f(x)\,dx = F(60) - F(0)$

$= (70 \times 60 + G(60)) - (70 \times 0 + G(0))$

≈ 4760 u.A.

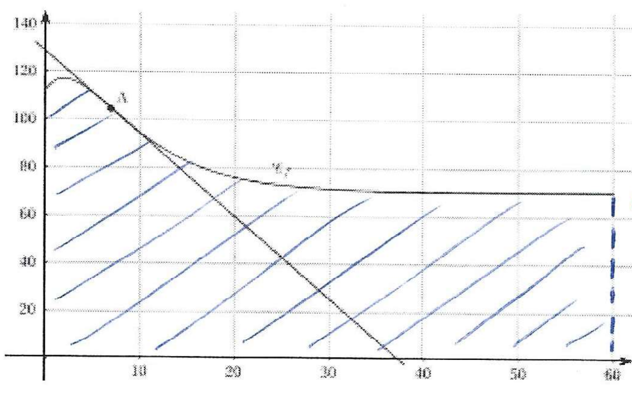
Partie C : Il reste un quart du pot de $10\,m^2$ soit $2{,}5\,m^2$.

La surface à couvrir correspond à 4 faces d'aire $4760\,cm^3$ + la partie de $5400\,cm^3$

$\rightarrow 4 \times 4760 + 5400 = 24\,440\,cm^3$

soit $2{,}44\,m^3$

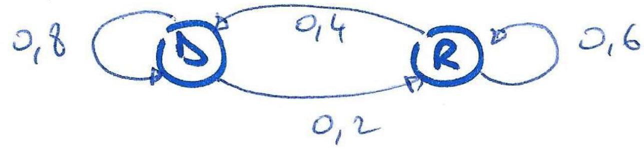
$\rightarrow$ cela devrait suffire !



c'est l'aire à hachurer dans la partie A et que l'on calcule dans la partie B.

Exercice de Spé :

① ⓐ On a le graphe probabiliste suivant



ⓑ on obtient la matrice de transition $M = \begin{array}{c|c} & D \quad R \\ \begin{array}{c} D \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$

② ⓐ On a $P_1 = (d_1 \ \ r_1) = (0 \ \ 1)$

ⓑ on a $M^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$

or $P_3 = P_2 \times M = \underbrace{P_1 \times M}_{P_2} \times M = P_1 \times M^2 = (0,56 \ \ \ 0,44)$

Donc on a $d_3 = 0,56$.

③ ⓐ On a $P_{n+1} = P_n \times M \to (d_{n+1} \ \ r_{n+1}) = (d_n \ \ r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

$\to$ on obtient $d_{n+1} = 0,8 d_n + 0,4 r_n$

$r_{n+1} = 0,2 d_n + 0,6 r_n$

ⓑ L'algorithme 2 n'est pas bon à cause du rang qui va commencer, dans les "boucles", à 1 alors que l'on connait déjà d_1 et r_1

L'algorithme 1 n'est pas bon car, dans la boucle, une fois que D_{n+1} est calculé, on est amené à calculer r_{n+1} avec le "nouveau D" soit D_{n+1} alors qu'il faudrait utiliser D_n.

$\to$ c'est l'algorithme 3.

④ On a $r_{n+1} = 0,2 d_n + 0,6 r_n$ avec $r_n + d_n = 1$

$\to d_n = 1 - r_n$

On obtient : $r_{n+1} = 0,2(1 - r_n) + 0,6 r_n$

$= 0,2 - 0,2 r_n + 0,6 r_n = 0,4 r_n + 0,2$

③ ⓐ c'est la question hyper classique !

On sait que : $r_{n+1} = 0,4\,r_n + 0,2$

$v_n = r_n - \frac{1}{3} \rightarrow r_n = v_n + \frac{1}{3}$

On a donc : $v_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{3}$

$= 0,4\,r_n + 0,2 - \frac{1}{3}$

$= 0,4\left(v_n + \frac{1}{3}\right) + 0,2 - \frac{1}{3}$

$= 0,4\,v_n + \underbrace{\frac{0,4}{3} + 0,2 - \frac{1}{3}}_{=0}$

$\rightarrow v_{n+1} = 0,4\,v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_1 = r_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ⓑ on a donc : ⚠

$v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$\rightarrow v_n = \frac{2}{3} \times (0,4)^{n-1}$

et on a alors $r_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times (0,4)^{n-1} + \frac{1}{3}$

soit $r_n = \frac{2}{3} \times \frac{(0,4)^n}{0,4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times (0,4)^n + \frac{1}{3}$

ⓒ à long terme, on a $n \to +\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,4^n = 0$ (car $0 < 0,4 < 1$)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{3} \times (0,4)^n = 0 \rightarrow \lim r_n = \frac{1}{3}$

→ la probabilité d'emprunter la voie rapide sera égale, à terme, à $\frac{1}{3}$.