Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac S

Liban mai 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

① ⓐ pour calculer f', on va utiliser deux formules type :

$$(uv)' = u'v + v'u \quad \text{et} \quad (u^2)' = 2u \times u'$$

On a : $f'(x) = 1 \times (1-\ln x)^2 + \cancel{x} \times 2(1-\ln x) \times \dfrac{-1}{\cancel{x}}$

$$= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)$$

$$= (1-\ln x)(1-\ln x-2)$$

$$= (1-\ln x)(-1-\ln x) = (1-\ln x)(-1)(1+\ln x)$$

$$= (\ln x - 1)(1+\ln x)$$

ⓑ pour $(\ln x+1)$, on résout $\ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

pour $(\ln x - 1)$, on résout $\ln x - 1 = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$

On obtient :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\ln x - 1$		$-$	$\vdots$	$-$	
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{1}{e}) = \frac{4}{e}$	$\searrow$	0

② ⓐ Aire $ON_{0,2}P_{0,2} = \dfrac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2}$ (triangle rectangle)

$$\approx \frac{0{,}525 \times 2{,}6}{2} \approx 0{,}68$$

ⓑ on utilise : $y = g'(0{,}2)(x-0{,}2) + g(0{,}2)$ avec $g(x) = \ln x$

$$\rightarrow y = \frac{1}{0{,}2}(x-0{,}2) + \ln 0{,}2$$

$$y = \boxed{\frac{1}{0{,}2}}\, x - 1 + \ln 0{,}2$$

$\hookrightarrow \boxed{\dfrac{1}{0{,}2} = 5}$ $\quad\hookrightarrow y = 5x - 1 + \ln 0{,}2$

ⓒ pour $x = 0$, on obtient l'ordonnée de $P_{0,2}$

↳ $y = -1 + \ln 0,2$ (qui est négatif ici !)

pour $y = 0$, on obtient l'abscisse de $N_{0,2}$

↳ $0 = 5x - 1 + \ln 0,2$

soit $x = \frac{1}{5}(1 - \ln 0,2) = 0,2(1 - \ln 0,2)$

L'aire du triangle rectangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est :

$$\frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2} = \frac{0,2(1-\ln 0,2)(1-\ln 0,2)}{2}$$

(⚠ $OP_{0,2}$ doit être positif bien sûr !)

On obtient : $\frac{1}{2} \times 0,2 \times (1 - \ln 0,2)^2$

③ On remarque que $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2} f(a)$

Donc $\mathcal{A}(a)$ est maximal lorsque $f(a)$ est maximal, c'est à dire pour $a = \frac{1}{e}$

et l'aire maximale est donc $\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{e}\right)$

$\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{4}{e} = \boxed{\frac{2}{e}}$

Exercice 2

① ⓐ $z_{A'} = -\dfrac{1}{-1+i} = -\dfrac{(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

ⓑ $z_{B'} = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}e^{i\pi/3}} = -2e^{-i\pi/3} = e^{i\pi} \times 2 \times e^{-i\pi/3}$

⚠ cela ne peut pas être la forme exponentielle avec (-2) qui est négatif.
→ on utilise $e^{i\pi} = -1$

→ $z_{B'} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

② ⓐ $z' = -\dfrac{1}{re^{i\theta}} = -\dfrac{1}{r}e^{-i\theta} = e^{i\pi} \times \dfrac{1}{r} \times e^{-i\theta} = \dfrac{1}{r}e^{i(\pi-\theta)}$

ⓑ on suppose que $|z| < 1$ soit $r < 1$

Donc $|z'| = \dfrac{1}{r} > 1$ → M' est bien à l'extérieur du disque de rayon 1.

③ ⓐ un point $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ vérifiera $KM^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ avec $K \begin{vmatrix} -1/2 \\ 0 \end{vmatrix}$

soit $\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ → $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

→ on obtient $x^2 + x + y^2 = 0$.

ⓑ on a $z' = -\dfrac{1}{x+iy} = -\dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

ⓒ pour M, tel que $z \neq 0$, appartenant au cercle, on aura, d'après le a) et le b) : $x^2 + y^2 = -x$

et $z' = \dfrac{-x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

On obtient : $z' = \dfrac{-x}{-x} + i\dfrac{y}{-x} = 1 - \dfrac{y}{x}i$

La partie réelle de l'affixe est donc fixe et égale à 1.

→ l'image est bien sur la droite verticale d'équation $x = 1$.

Exercice 3

Partie A

① On sait que $(BD) \perp$ plan$(ABC) \rightarrow (BD) \perp (AC)$
et on sait que $(AB) \perp (AC)$.
Donc $(AC) \perp$ plan(ABD)

② On sait que ABC est rectangle en A.
On sait que $(AC) \perp$ plan$(ABD) \rightarrow$ CAD est rectangle en A
On sait que $(d) \perp$ plan $(BAC) \rightarrow$ BAD est rectangle en B
et BDC rectangle en B.
Donc ABCD est bien un bicoin.

③ ⓐ L'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle !
$\rightarrow$ pour ABC, [BC] est l'arête la plus longue
pour ABD, [AD] est l'arête la plus longue
pour BDC, [DC] est l'arête la plus longue et elle est plus grande que [BC].
pour ADC, [DC] est l'arête la plus longue et elle est plus grande que [AD].
Bilan : [DC] est bien l'arête la plus longue.

ⓑ on applique le théorème de la médiane (lié au cercle circonscrit) dans les triangles rectangles BDC et ABC par exemple.

⚠ on voit ici que certaines propriétés du collège peuvent ressortir le jour du Bac !!

Partie B

① il est évident que (d) est orthogonale au plan P.
Donc un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) sera un vecteur normal du plan P.
En prenant l'équation paramétrique, on a $\vec{u} \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$
Donc l'équation cartésienne de P s'écrira :
$$2x - 2y + 1z + d = 0$$
or le point A appartient à ce plan.
Donc on obtient $2\times 3 - 2\times 1 - 5 + d = 0 \to d = 1$
On obtient donc : $2x - 2y + z + 1 = 0$

② On pourrait vérifier que B vérifie bien les équations cartésienne de P et paramétrique de (d)
ou comme ici utiliser la méthode générale.
→ on remplace x, y et z de P avec la droite (d) !
$$2(2t+1) - 2(-2t+9) + (t-3) + 1 = 0$$
soit $t = 2$ → et on remplace dans (d)
On obtient bien $\begin{cases} x = 2\times 2 + 1 = 5 \\ y = -2\times 2 + 9 = 5 \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

③ Le point C vérifie bien l'équation de P
car $2\times 7 - 2\times 3 + (-9) + 1 = 14 - 6 - 9 + 1 = 0$.
On calcule $AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$
$AC = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$
et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{vmatrix} = 2\times 4 + 4\times 2 + 4\times(-4) = 0$

Donc $AB = AC$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

4) a) $(d) \perp$ plan P et $M \in (d)$ $\rightarrow (BM) \perp$ plan P $\rightarrow (BM) \perp (AB)$

(car (AB) est une droite du plan P)

b) on a $AB = 6$

et on calcule $MB = \sqrt{(2t+1-5)^2+(-2t+9-5)^2+(t-3-(-1))^2}$

$\rightarrow MB = \sqrt{(2t-4)^2+(-2t+4)^2+(t-2)^2} = \sqrt{9t^2-36t+36}$

On veut $AB = MB$ ou plutôt $AB^2 = MB^2$

soit $9t^2 - 36t + 36 = 36$

$\rightarrow 9t^2 - 36t = 0 \rightarrow t^2 - 4t = 0$

c) on résout $t^2 - 4t = 0 \rightarrow t(t-4) = 0$

$\rightarrow t = 0$ ou $t = 4$

En remplaçant le paramètre t, on obtient :

$M_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{vmatrix}$ et $M_2 \begin{vmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

Partie C

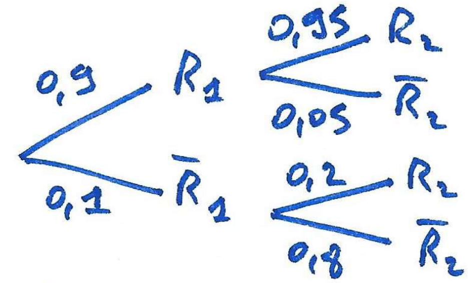
Les coordonnées du milieu de [CD] sont $\begin{vmatrix} \frac{9+7}{2} = 8 \\ \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1+(-9)}{2} = -4 \end{vmatrix}$

et le rayon de la sphère est égal par exemple à :

$IC = \sqrt{(7-8)^2+(3-2)^2+(-9-(-4))^2}$

$= \sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-5)^2} = \sqrt{27}$.

Exercice 4 : ① ⓐ

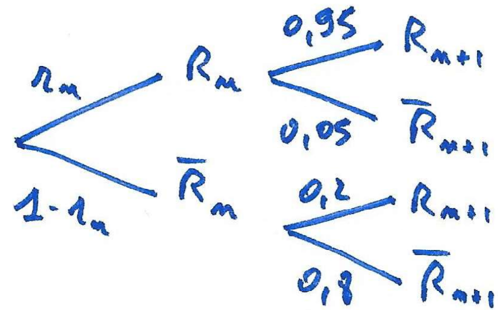


ⓑ on cherche $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = 0{,}9 \times 0{,}95$
$= 0{,}855$

ⓒ Avec la formule des probabilités totales, on a :
$P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \overline{R_1})$
$= 0{,}855 + 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}875$

ⓓ on cherche $P_{R_2}(\overline{R_1}) = \dfrac{P(R_2 \cap \overline{R_1})}{P(R_2)} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}875} \approx 0{,}023$

② ⓐ



ⓑ Avec la formule des probabilités totales, on a :
$P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$
$\rightarrow r_{n+1} = 0{,}95 \times r_n + 0{,}2(1-r_n) = 0{,}75 r_n + 0{,}2$.

ⓒ Par récurrence : Init $r_1 = 0{,}1 \times 0{,}75^{1-1} + 0{,}8$
$= 0{,}1 \times 0{,}75^0 + 0{,}8 = 0{,}9 \rightarrow$ VRAI

Hérédité On suppose VRAI pour $n \rightarrow r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$
On a $r_{n+1} = 0{,}75 r_n + 0{,}2 = 0{,}75(0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8) + 0{,}2$
soit $r_{n+1} = 0{,}1 \times 0{,}75 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}75 \times 0{,}8 + 0{,}2$
$\rightarrow r_{n+1} = 0{,}1 \times 0{,}75^n + 0{,}8$ (VRAI pour $n+1$)

ⓓ On a $-1 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^{n-1} = 0 \rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0{,}8$

$\rightarrow$ à terme, 80% des personnes rapporteront leurs bouteilles.

Exercice de Spé :

① pour a_{n+1}, il reste la moitié de a_n (→ on multiplie par 0,5), on récupère les trois quarts de b_n (→ on multiplie par 0,75) et on ajoute 200 litres de la réserve R (donc on ajoute 2 ici).

On obtient $a_{n+1} = 0,5\, a_n + 0,75\, b_n + 2$

De même, on obtiendrait $b_{n+1} = 0,25\, b_n + 3$

soit $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad U_{n+1} = M U_n + C$

② ⓐ on obtient $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^2 = I$ (identité)

Donc $P \times P = I \rightarrow P$ est inversible avec $P^{-1} = P$.

ⓑ on calcule $PMP = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ → matrice diagonale

ⓒ On a $PMP = D \rightarrow PMP \times P = D \times P$ (or $P \times P = P^2 = I$)

$\rightarrow PM = DP$

$\rightarrow P \times PM = PDP$ (avec encore $P \times P = I$)

$\rightarrow M = PDP$ soit $\boxed{PDP = M}$

ⓓ Init on a $M^0 = PD^0P = P \times I \times P = P \times P = P^2 = I$

→ vrai au rang 0

Hérédité on suppose la propriété vraie au rang n

on a $M^{n+1} = M^n \times M = PD^n \underbrace{P \times P}_{I} DP = PD^{n+1}P$

→ la propriété reste vraie au rang $n+1$

③ on calcule $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On obtient $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

④ ⓐ on a $V_{n+1} = U_{n+1} - X$ avec $U_{n+1} = \Pi U_n + C$
et $X = \Pi X + C$

on obtient $V_{n+1} = \Pi U_n + C - \Pi X - C$
$= \Pi U_n - \Pi X = \Pi(U_n - X) = \Pi V_n$

ⓑ on a $U_n = V_n + X = \Pi^n V_0 + X$

$$\rightarrow U_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{V_0 = U_0 - X}$

$$\rightarrow U_n = \begin{pmatrix} -9\times 0,5^n - 3(3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n) + 10 \\ -3\times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow U_n = \begin{pmatrix} -9\times 0,5^n - 9\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10 \\ -3\times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$$

soit $U_n = \begin{pmatrix} -18\times 0,5^n + 9\times 0,25^n + 10 \\ -3\times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$

⑤ ⓐ On a $b_n = -3 \times 0,25^n + 4$

* On a $b_{n+1} - b_n = -3 \times 0,25^{n+1} + 4 - (-3 \times 0,25^n + 4)$

$$= -3 \times 0,25^{n+1} \cancel{+4} + 3 \times 0,25^n \cancel{-4}$$

$$= 3 \times 0,25^n (-0,25 + 1)$$

$$= 3 \times 0,25^n \times 0,75 > 0$$

Donc on a $b_{n+1} - b_n > 0$ pour tout n

→ la suite (b_n) est croissante.

** $b_n = -3 \times 0,25^n + 4 < 4$ (car $-3 \times 0,25^n$ est négatif!)

Donc la suite (b_n) est majorée par 4.

*** on a $-1 < 0,25 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} (0,25)^n = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} -3 \times 0,25^n = 0 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} b_n = 4$

ⓑ On a également $\lim_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = 10$

ⓒ a_n est croissante et sa limite est égale à 10.

Donc a_n ne dépassera pas 10

b_n est croissante et sa limite est égale à 4

Donc b_n ne dépassera pas 4.

On prevoiera donc $4 (\times 100) = 400 \ell$ pour le bassin B

et $10 (\times 100) = 1000 \ell$ pour le bassin A.