Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac ES

Liban mai 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

AFFIRMATION 1 :

L'équation de la tangente sera : $y = u'(1) \times (x-1) + u(1)$

avec $u(x) = 3\ln x - 2x + 1$

et $u'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 2 = \frac{3}{x} - 2$

Donc on a $u(1) = 3\ln 1 - 2\times 1 + 1$

$= 3\times 0 - 2 + 1 = -1$

$u'(1) = \frac{3}{1} - 2 = 3 - 2 = 1$

On obtient : $y = 1(x-1) + (-1)$

$\rightarrow y = x - 1 - 1 = x - 2$ $\boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 2 :

Il faut montrer que $\int_e^{e^2} f(x)\,dx = 1$

et f positive sur $[e;e^2]$.

$\rightarrow$ sur $[e;e^2]$, $\ln x$ est positif (c'est évident)

Donc $f(x)$ est positif également.

$\rightarrow$ $x\ln x - x$ est une primitive de $\ln x$.

Donc une primitive F de $f(x) = \frac{1}{e^2}\ln x$ sera

$F(x) = \frac{1}{e^2}(x\ln x - x)$

On a $\int_e^{e^2} f(x)\,dx = F(e^2) - F(e) = \frac{1}{e^2}(e^2\ln e^2 - e^2) - \frac{1}{e^2}(e\ln e - e)$

or $\ln e = 1$ et $\ln e^2 = 2\ln e = 2$

Donc $\int_e^{e^2} f(x)\,dx = \frac{1}{e^2}(2e^2 - e^2) - \frac{1}{e^2}(e - e)$

$= \frac{1}{e^2}(e^2) - \frac{1}{e^2}\times 0 = 1 \rightarrow \boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 3 :

on vérifie si on a bien $G'(x) = g(x)$

or $G'(x) = -6x(-2)e^{-2x+1} = 12e^{-2x+1}$

Donc G' n'est pas égale à g

→ inutile d'aller plus loin → $\boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 4 :

on va calculer $h'(x)$, puis $h''(x)$ en utilisant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

on obtient : $h'(x) = \frac{4x^2 - 2x(4x+1)}{x^4} = \frac{-4x^2 - 2x}{x^4}$

puis $h''(x) = \frac{(-8x-2)x^4 - 4x^3(-4x^2-2x)}{x^8}$

$\rightarrow h''(x) = \frac{8x^5 + 6x^4}{x^8} = \frac{x^4(8x+6)}{x^8} = \frac{8x+6}{x^4}$

Le signe de $h''(x)$ dépend du signe de $8x+6$.

or $8x + 6 \leq 0 \rightarrow 8x \leq -6 \rightarrow x \leq -\frac{6}{8}$

$\rightarrow x \leq -0{,}75$

Donc, sur $[-8 ; -0{,}75]$, $h''(x)$ est négative

→ h est alors concave → $\boxed{\text{VRAI}}$

Exercice 2 :

Partie 1 : ① $U_1 = 1,63 \times U_0 = 1,63 \times 97 \approx 158,11$

$U_2 = 1,63 \times U_1 = 1,63 \times 158,11 \approx \boxed{258}$

② on a $U_n = U_0 \times q^{(n-0)} = 97 \times (1,63)^n$

③ (U_n) est croissante car c'est une suite géométrique de raison > 1.

④ U_0 correspond au 1 juin

$\rightarrow$ U_{11} correspond au 12 juin

On a : $U_{11} = 97 \times (1,63)^{11} \approx 20\,933$ centaines.

Partie 2 : ① V_{12} correspond au 13 juin

$\rightarrow V_{12} = \frac{1}{3}(-2809 \times 0,91^{12} + 3100) \approx 731$ centaines

② on calcule $V_{n+1} - V_n$

$= \frac{1}{3}(-2809 \times 0,91^{n+1} + 3100) - \frac{1}{3}(-2809 \times 0,91^{n} + 3100)$

$= -\frac{2809}{3} \times 0,91^{n+1} + \cancel{\frac{3100}{3}} + \frac{2809}{3} \times 0,91^{n} - \cancel{\frac{3100}{3}}$

$= \underbrace{-\frac{2809}{3}}_{\ominus} \times 0,91^n \, (\underbrace{0,91 - 1}_{\ominus}) > 0$

Donc on a $V_{n+1} - V_n > 0 \rightarrow V_{n+1} > V_n$

(V_n) est bien une suite croissante

Partie 3 :

① c'est le modèle 2 qui est le plus proche !

② ⓐ on résout

$$\frac{1}{3}(-2809\times 0{,}91^n+3100)\geq 1000$$

$\to$ $-2809\times 0{,}91^n+3100\geq 3000$

$\to$ $-2809\times 0{,}91^n\geq -100$

$\to$ $0{,}91^n\leq \dfrac{-100}{-2809}$ ⚠

on appliquer "ln" !

on obtient $\ln 0{,}91^n\leq \ln\left(\dfrac{100}{2809}\right)$

soit $n\times \ln 0{,}91\leq \ln\left(\dfrac{100}{2809}\right)$

soit $n\geq \dfrac{\ln\left(\frac{100}{2809}\right)}{\ln 0{,}91} \to \boxed{\simeq 35{,}4}$

$\to$ à partir du rang 36 !

ⓑ Le nombre de chenilles dépassera 1000 centaines (soit 100 000) à partir du 36e jour.

Exercice 3 :

① On utilise la formule $(uv)' = u'v + v'u$

$\rightarrow f'(x) = 0 + (-8x-10)e^{-0,5x} + (-4x^2-10x+8)(-0,5e^{-0,5x})$

$= e^{-0,5x}(-8x-10-0,5(-4x^2-10x+8))$

$= e^{-0,5x}(-8x-10+2x^2+5x-4)$

$= e^{-0,5x}(2x^2-3x-14)$

② $e^{-0,5x}$ est toujours positif

On étudie donc le signe du trinôme $2x^2-3x-14$

$\rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 121 > 0$

il y a deux racines : $x_1 = \frac{3+\sqrt{121}}{4}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{121}}{4}$

$x_1 = \frac{7}{2}$ $\qquad x_2 = -2$

On obtient :

x	-4		-2		$\frac{7}{2}$		10
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de $f(x)$	≈ -117	↗	≈ 34	↘	≈ -12	↗	≈ -2

③ ⓐ On applique le TVI !

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-4;-2]$

On a : $f(-4) \approx -117$ et $f(-2) \approx 34$

Donc le nombre 0 appartient à l'intervalle image $[-117;34]$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique sur $[-4;-2]$.

(b) on obtient

n	signe de p	a	b	b-a	b-a > 10^{-1}
-3,5	positif	-3,5	-3	0,5	VRAI

(c) La solution de l'équation $f(x)=0$ de l'intervalle $[-4;-2]$ se trouve entre $-3,1875$ et $-3,125$.

(4) Cette valeur moyenne est égale à :

$$\frac{1}{10-(-4)}\int_{-4}^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{14}\left(F(10)-F(-4)\right)$$

$\rightarrow$ on obtient $v_m \simeq -3,54$

Exercice 4

Partie A

① on a une loi BINOMIALE avec $n = 300$ et $p = 0{,}72$

② on cherche $p(X = 190) \rightarrow$ binomFdp $\rightarrow \boxed{0{,}0002}$

③ on cherche $p(X \geq 220) = 1 - p(\underbrace{X \leq 219}_{\text{binomFRep}})$

$\simeq 0{,}329$

Partie B

① on résout l'équation dans un premier temps.

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 81 > 0$

$\rightarrow$ il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{81}}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{81}}{4} = 4$

Le tableau de signes du trinôme sera :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
signes du trinôme		$\underbrace{+}_{\geq 0}$	0	$-$	0	$\underbrace{+}_{\geq 0}$	

Donc $S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[4 ; +\infty\right[$

② on reconnait une répartition uniforme donc une loi uniforme.

Dans l'intervalle $[0 ; 10]$ de longueur 10, la solution peut se trouver dans $[0 ; 4]$ qui a une longueur égale à 4.

La probabilité demandée est donc $\dfrac{4}{10} = 0{,}4$

Partie C :

1) a) avec la calculatrice, on obtient

$P(2,18 \leq Z \leq 2,42) \simeq 0,72$

b) avec la calculatrice, on obtient

$P(Z \geq 2,25) \simeq 0,68$

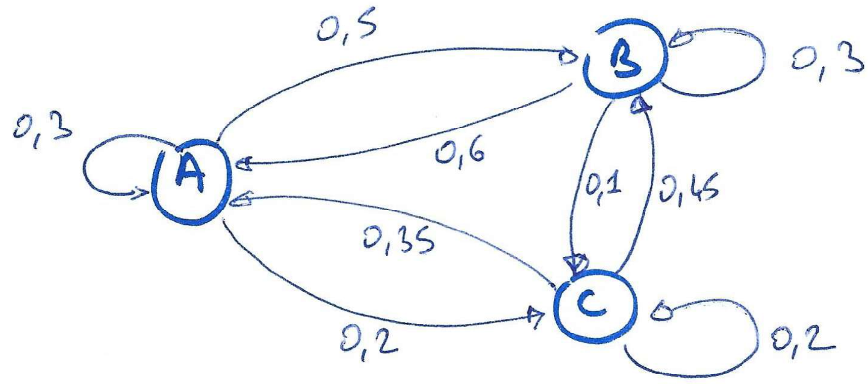
2) On reconnait une valeur proche de 0,954 qui correspond à l'intervalle 2σ !

L'écart entre 2,3 et 2,42 (et celui entre 2,18 et 2,3) doit être égal à 2σ

soit $2\sigma = 0,12 \rightarrow \sigma = 0,06$

Exercice de Spé :

① on a le graphe probabiliste suivant



② La matrice de transition s'écrira :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

③ on a $P_1 = (0{,}355 \quad 0{,}405 \quad 0{,}24)$

↳ à la calculatrice, on obtient $P_2 = P_1 \times M$

→ $P_2 = (0{,}4335 \quad 0{,}407 \quad 0{,}1595)$

④ on peut vérifier que $P_{12} = P_1 \times M^{11}$

et $P_{13} = P_1 \times M^{12}$

↳ à la calculatrice, on obtient effectivement un résultat, pour le plat C, stable et égal environ à 0,159 soit 15,9%.

Partie 2

① Les degrés des sommets sont :

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
3	4	6	2	2	3

→ il y a deux sommets de degré impair.
Donc il existe une chaine Eulérienne qui permet d'emprunter les rues une et une seule fois.

(b) On peut alors partir ou revenir de chacun de ces sommets de degré impair
→ on peut partir et revenir de H_1 ou de H_6.

(2) Voici une proposition pour cet algorithme, pour laquelle je conserve que les temps minimaux.

H_4	H_1	H_5	H_3	H_2	H_6	H_7	H_8
	H_4 (8)	H_4 (25)	~~H_1 (24)~~	~~H_3 (45)~~	H_3 (27)	H_3 (26)	~~H_3 (50)~~
			H_5 (22)	H_1 (17)	~~H_2 (34)~~	~~H_2 (28)~~	H_7 (35)

Le chemin le plus court est donc :

$$H_4 \to H_5 \to H_3 \to H_7 \to H_8$$

Le temps de parcours est alors de 35 minutes.