# Corrigé

# de l'épreuve de mathématiques

# Bac S

# Centres Etrangers - Pondichery juin 2019

**Correction proposée**
**par**
**Bruno Swiners**
**sur**
**www.coursmathsaix.fr**

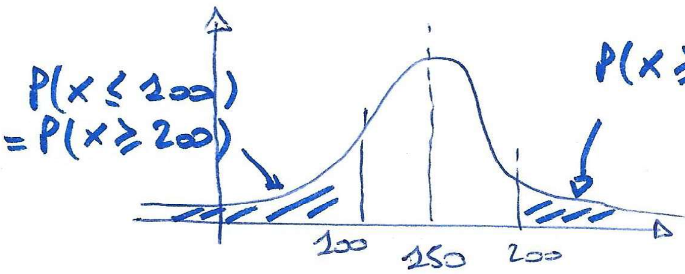
Exercice 1 : pour ce QCM, les bonnes réponses sont :

1 d    2 d    3 c    4 b

Quelques explications quand même :

1 → on reconnait une loi binomiale avec $n = 80$ et $p = 0{,}25$
On cherche $P(X = 20)$ → on utilise binomFdp.

2 → on utilise la symétrie d'une loi normale.




→ $P(100 \leq X \leq 200) = 1 - 2 \times 0{,}025 = 0{,}95$

et $P(X \geq 100) = 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$

3 → avec $E(T) = 5$ on calcule $\lambda = \dfrac{1}{E(T)} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

on sait que $p(T \geq 5) = e^{-\lambda T} = e^{-0{,}2 \times 5} = e^{-1}$

4 → l'intervalle de confiance s'écrit

$$\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Son amplitude (ou sa longueur) est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

→ on veut $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}04$ → $\sqrt{n} = \dfrac{2}{0{,}04} = 50$

→ $n = 2500$.

Exercice 2 : Partie A

① $U_2 = 2U_1 - 1 = 2\times 0 - 1 = -1$

$U_3 = 3U_2 - 1 = 3\times(-1) - 1 = -4$

$U_4 = 4U_3 - 1 = 4\times(-4) - 1 = -17.$

② on écrit $U \leftarrow (n+1)u - 1$

③ avec $U_1 = 0,7$ ; il semblerait $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

avec $U_1 = 0,8$ ; il semblerait $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Partie B :

① on calcule $F'(x) = \underbrace{-1}_{u'}\underbrace{e^{1-x}}_{v} + \underbrace{(-1-x)}_{u}\underbrace{(-1)e^{1-x}}_{v'}$

$\rightarrow F'(x) = -e^{1-x} + e^{1-x} + xe^{1-x} = f(x)$. CQFD.

② $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}dx = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$

$= (-1-1)e^{1-1} - (-1-0)e^{1-0}$

$= -2 + e = e - 2$

③ on a $I_2 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 5$

④ ⓐ $x$ étant positif, on a $x^n e^{1-x} \geqslant 0$

ensuite, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\rightarrow 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$

$\rightarrow e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$ (la fonction expo conserve l'ordre !)

$\rightarrow x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$ (car $x^n$ est positif)

ⓑ on a $\int_0^1 x^n e\,dx = e\int_0^1 x^n dx = e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$= e\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right)$

$= \frac{e}{n+1}$

ⓒ on sait que : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

$$\to \int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leq \int_0^1 x^n e\,dx$$

$$\to 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

ⓓ on applique le théorème des GENDARMES avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Partie C :

① Init on vérifie $U_1 = 1!(U_1 - e + 2) + I_1$

soit $U_1 = U_1 - e + 2 + e - 2 = U_1$ !! $\boxed{\text{VRAI}}$.

Hérédité on suppose VRAI pour $n$

Montrons VRAI pour $n+1$.

On a : $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$

$$= (n+1)\left(n!(U_1 - e + 2) + I_n\right) - 1$$

$$= \underbrace{(n+1)n!}_{(n+1)!}(U_1 - e + 2) + \underbrace{(n+1)I_n - 1}_{I_{n+1}}$$

$\to U_{n+1} = (n+1)!(U_1 - e + 2) + I_{n+1}$ $\boxed{\text{CQFD}}$

② ⓐ avec $U_1 = 0,7$ ; on a $(U_1 - e + 2) < 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n!(U_1 - e + 2) = -\infty$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

ⓑ avec $U_1 = 0,8$ ; on a $(U_1 - e + 2) > 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n!(U_1 - e + 2) = +\infty$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Exercice 3 :

Partie A : ① ⓐ $z=i \to z^2=i^2=-1$ et $\frac{1}{z}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

ⓑ on constate que $A(1)$, $N_1(-1)$, $P_1(-i)$ ne sont pas alignés.

② on résout $z^2+z+1=0 \to \Delta=-3$

$\to z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

③ on travaille avec $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓐ on a $|z|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

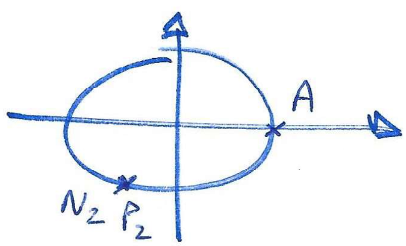
et $\cos\theta=\frac{-1/2}{1}$ ; $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}/2}{1} \to \theta=\frac{2\pi}{3}$

On obtient : $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

On en déduit : $z^2=(e^{i\frac{2\pi}{3}})^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

et $\frac{1}{z}=\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

ⓑ




Les points $N_2$ et $P_2$ sont même confondus !!

Partie B :

ⓐ on développe $(z^2+z+1)(1-\frac{1}{z})$

$=z^2+z+1-\frac{z^2}{z}-\frac{z}{z}-\frac{1}{z}$

$=z^2+\cancel{z}+\cancel{1}-\cancel{z}-\cancel{1}-\frac{1}{z}=z^2-\frac{1}{z}$

ⓑ $z^2 - \frac{1}{z} = z_N - z_P = z_{\vec{PN}}$

et $1 - \frac{1}{z} = z_A - z_P = z_{\vec{PA}}$

L'égalité du ⓐ se traduit par : $z_{\vec{PN}} = (z^2+z+1) z_{\vec{PA}}$

Donc les vecteurs sont colinéaires ssi $z^2+z+1 \in \mathbb{R}$

ⓑ on calcule $(x+iy)^2 + (x+iy) + 1$

$= x^2 + 2ixy + \underbrace{i^2y^2}_{=-y^2} + x + iy + 1$

$= x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$

⑤ ⓐ on veut que $z^2+z+1$ soit réel

soit $\mathrm{Im}(z^2+z+1) = 0$

soit $2xy + y = 0 \rightarrow y(2x+1) = 0$

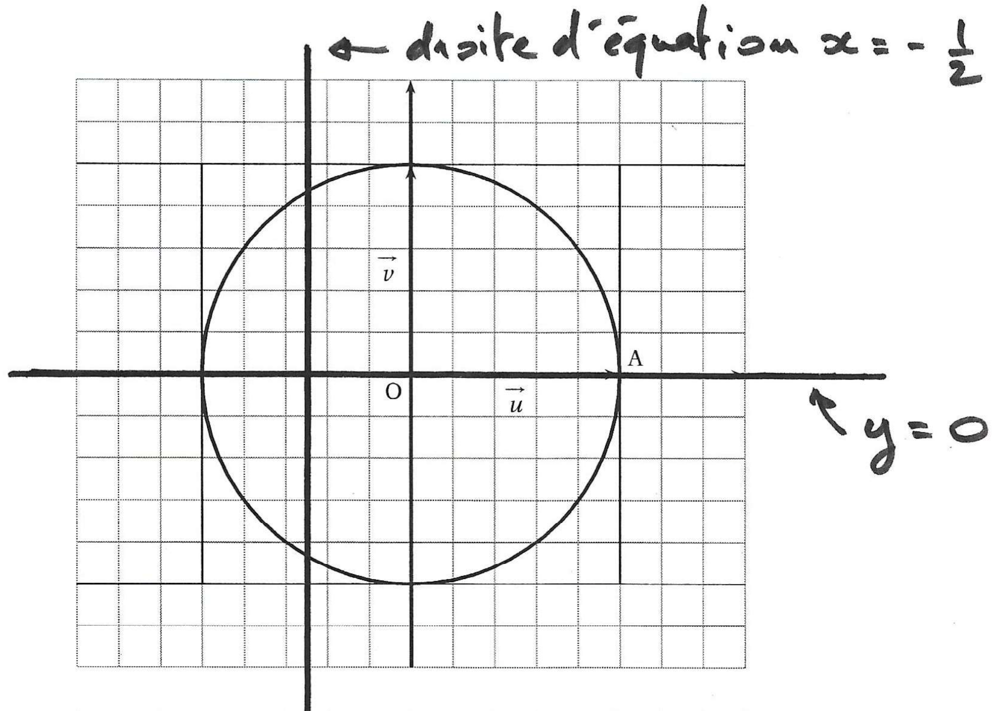
On obtient :

$y = 0$ (si $z$ est réel alors $z^2+z+1$ est réel !!)

ou

$2x+1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (c'est la droite verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$)

ⓑ



Exercice 4 :

① ⓐ on a $P\begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix}$ $Q\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}$ $\Omega\begin{vmatrix}3\\3\\3\end{vmatrix}$

ⓑ on a $R\begin{vmatrix}0\\4\\6\end{vmatrix}$ → on veut $\vec{n}.\vec{PQ}=0$

et $\vec{n}.\vec{PR}=0$

On obtient : $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\b\\c\end{vmatrix}.\vec{PQ}\begin{vmatrix}-2\\0\\2\end{vmatrix} = -2+2c=0 \to c=1$

$\vec{n}\begin{vmatrix}1\\b\\c\end{vmatrix}.\vec{PR}\begin{vmatrix}-2\\4\\6\end{vmatrix} = -2+4b+6=0$

soit $4b=-4 \to b=-1$

→ le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR).

ⓒ Une équation du plan sera donc :

$1\times x - 1\times y + 1\times z + d = 0$

soit $x-y+z+d=0$

or $P \in$ plan(PQR) → $2-0+0+d=0 \to d=-2$

On obtient bien : $x-y+z-2=0$

② ⓐ Un vecteur directeur de $\Delta$ sera $\vec{n}$, vecteur normal au plan (PQR), soit $\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix}$

et la droite $\Delta$ passe par le point $\Omega\begin{vmatrix}3\\3\\3\end{vmatrix}$

On obtient donc $\Delta\begin{cases}x=3+k\\y=3-k\\z=3+k\end{cases}$

ⓑ on cherche directement les coordonnées de I

→ $(3+k)-(3-k)+(3+k)-2=0$

→ $3k+1=0 \to k=-\frac{1}{3}$

On obtient donc : $I \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ y = 3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} \\ z = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$

c) on a $\Omega I = \sqrt{(x_I - x_\Omega)^2 + (y_I - y_\Omega)^2 + (z_I - z_\Omega)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

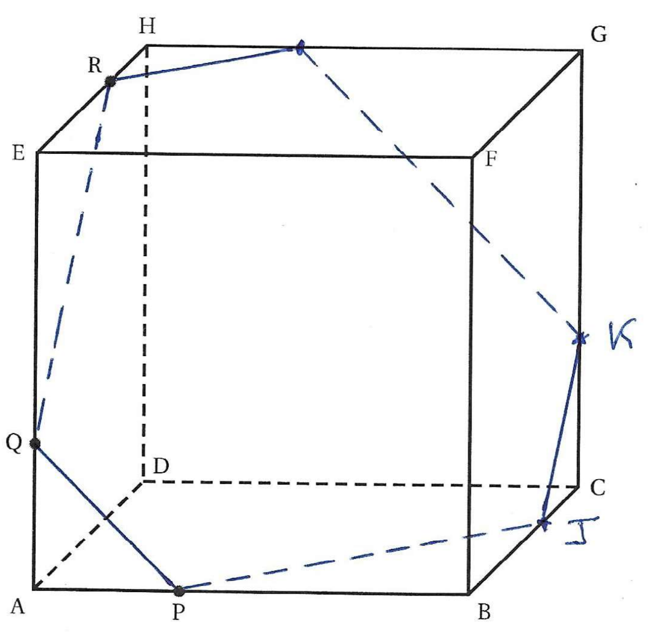
3) a) On vérifie que $6 - 4 + 0 - 2 = 0$

b) On a $\overrightarrow{JK} \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{QR} \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow \overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{JK}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires

Donc on a $(QR) // (JK)$

c)




Dans l'ordre :
- on trace [PQ]
- on trace [QR]
- on place les points J et K dont on connait les coordonnées
- on trace [PJ] et [JK]
- on trace la parallèle à (QP) passant par K.
- on peut finir la section !

## Exercice de Spé :

**Partie A** : ① on a, par exemple, $40 = 29 + 11$

② on cherche une solution particulière

$\rightarrow$ on a $20 \times 2 + 19 \times 0 = 40$

et on veut $20x + 19y = 40$ (on soustrait les égalités)

on obtient : $20(2-x) + 19(0-y) = 0$

ou $20(x-2) = -19y$

or 20 et 19 sont premiers entre eux

et 20 divise $20(x-2)$ donc 20 divise $-y$ (théorème de Gauss)

$\rightarrow$ il existe $k \mid y = 20k$

De même, 19 divise $x-2$ et on aurait $x = 2 + 19k$

Les solutions sont $\{2+19k \, ; \, 20k\}$

③ ⓐ on a $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

ⓑ On peut, par exemple, observer que la différence entre $x+y$ et $x-y$ est égale à $x+y-(x-y) = 2y$

$\rightarrow$ c'est donc un nombre pair

Et si on ajoute un nombre pair à un nombre pair (respectivement impair) alors le résultat est un nombre pair (respectivement impair).

ⓒ Les diviseurs de 40 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 ; 40

Donc les valeurs possibles de $x+y$ et $x-y$ sont :

| $x+y$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 20 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-y$ | 40 | 20 | 10 | 8 | 5 | 4 | 2 | 1 |

<u>MAIS</u> $x+y$ ne peut pas être inférieur à $x-y$

et $x+y$ doit avoir la même parité que $x-y$

Donc les seules possibilités sont :

Cas 1 : $x+y=10$
$x-y=4$ $\rightarrow$ $x=7$ et $y=3$

Cas 2 : $x+y=20$
$x-y=2$ $\rightarrow$ $x=11$ et $y=9$

Partie B : ① ⓐ On a $40 = 13+27 = 13+3^3$
$\rightarrow 40 = 1^3+7^3+10^3-11^3+3^3$

ⓑ On écrit $6\times 8 = 48 = (8+1)^3+(8-1)^3-8^3-8^3$
$\rightarrow 48 = 9^3+7^3-8^3-8^3$
et donc $40 = 48-8 = 48-2^3 = 9^3+7^3-8^3-8^3-2^3$

② ⓐ

| Reste de la division euclidienne de $n$ par 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $n^3$ par 9 | 0 | 1 | 8 ou $-1$ | 0 | 1 | 8 ou $-1$ | 0 | 1 | 8 ou $-1$ |

$\hookrightarrow$ une explication en exemple
$4 \equiv 4\ [9]$
$4^2 \equiv 16 \equiv 7\ [9]$
$4^3 \equiv 28 \equiv 1\ [9]$

ⓑ On a $40 \equiv 4\ [9]$
$\rightarrow$ 40 est congru à 4 modulo 9, et cela ne peut pas être obtenu avec "3 cubes" qui sont ici congrus chacun à 1 ; 0 ou $-1$ !!