Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac S

Antilles - Guyane juin 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A : ① On a $f(0) = \dfrac{a}{1+e^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{1+1} = \dfrac{a}{2}$

or le point $A(0\,;0{,}5)$ nous donne $f(0) = 0{,}5$

$\to$ on obtient $\dfrac{a}{2} = 0{,}5 \to a = 0{,}5 \times 2 = 1$

② On peut utiliser la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

ou la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Et on se souviendra que $(e^{-bx})' = -be^{-bx}$

③ La tangente en A passe par le point B $\to$ son coefficient directeur est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0{,}5}{10-0} = 0{,}05$.

On sait que ce coefficient est égal à $f'(0)$.

Or $f'(0) = \dfrac{be^{-b\times 0}}{(1+be^{-b\times 0})^2} = \dfrac{b\times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{b}{4}$

On a donc : $\dfrac{b}{4} = 0{,}05 \to b = 0{,}05 \times 4 = 0{,}2$

Partie B :

① On calcule $p(10) = \dfrac{1}{1+e^{-0{,}2\times 10}} = \dfrac{1}{1+e^{-2}} \approx 0{,}88$

② ⓐ On peut utiliser les résultats de la partie A pour obtenir $p'(x) = \dfrac{0{,}2e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2}$

$\to$ p' est positive pour tout $x \in [0\,;+\infty[$

$\to$ la fonction p est croissante sur $[0\,;+\infty[$

ⓑ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}2x} = 0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \dfrac{1}{1} = 1$

ⓒ à terme, on aura une proportion égale à 1, soit 100% d'équipement !

③ on cherche à résoudre $p(x) \geq 0,95$

soit $\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}} \geq 0,95$

→ on peut utiliser un tableau de valeurs de la calculatrice en partant de valeurs entières pour x

→ on peut effectuer la résolution

$\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}} \geq 0,95$ soit $1 \geq 0,95(1+e^{-0,2x})$

soit $1 \geq 0,95 + 0,95e^{-0,2x}$

soit $0,05 \geq 0,95e^{-0,2x}$

soit $\dfrac{0,05}{0,95} \geq e^{-0,2x}$

→ on applique alors la fonction "ln".

On obtient : $\ln\left(\dfrac{0,05}{0,95}\right) \geq -0,2x$

↳ $x \geq \dfrac{\ln\left(\frac{0,05}{0,95}\right)}{-0,2}$ $\simeq 14,72$

soit au bout de 15 ans, en 2015.

④ ⓐ On a $p(x) = \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{0,2x}}} = \dfrac{1}{\frac{e^{0,2x}+1}{e^{0,2x}}}$

→ on obtient $p(x) = \dfrac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}+1}$

ⓑ La primitive sera de la forme $F(x) = \ln(1+e^{0,2x})$

or $F'(x) = \dfrac{0,2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$ donc il faut multiplier par $\dfrac{1}{0,2}$!

On obtient : $P(x) = \dfrac{1}{0,2}\ln(1+e^{0,2x})$

ⓒ On a : $m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_8^{10} p(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\left(P(10) - P(8)\right)$

→ $m = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{0,2}\ln(1+e^{0,2\times 10}) - \dfrac{1}{0,2}\ln(1+e^{0,2\times 8})\right)$

→ $m = \underbrace{\dfrac{5}{2}\left(\ln(1+e^{2}) - \ln(1+e^{1,6})\right)}_{\text{valeur exacte}} \simeq \underbrace{0,86}_{\text{valeur approchée}}$

Exercice 2

Partie A : ① La droite (AB) passe par le point $A\begin{vmatrix}2\\4\\0{,}25\end{vmatrix}$

et a comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}0\\2\\0{,}5\end{vmatrix}$

Une représentation paramétrique de (AB) sera $\begin{cases}x = 2+0k\\ y = 4+2k\\ z = 0{,}25+0{,}5k\end{cases}$

② a) On vérifie que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (PQU).

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix}0\\1\\-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix} = 0\times0 + 1\times1 + (-1)\times1 = 0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PU} = \begin{vmatrix}0\\1\\-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}10\\0\\0\end{vmatrix} = 0\times10 + 1\times0 + (-1)\times0 = 0$

b) Le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix}0\\1\\-1\end{vmatrix}$ correspond au vecteur normal $\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$

→ Une équation cartésienne sera donc :

$0\times x + 1y + (-1)\times z + d = 0$

soit $y - z + d = 0$

or le point $P \in (PQU)$ et vérifie cette équation

Donc $10 - 0 + d = 0 \rightarrow d = -10$

On obtient donc pour le plan (PQU) : $y - z - 10 = 0$

③ On peut directement chercher le point d'intersection de la droite et du plan

→ $(4+2k) - (0{,}25+0{,}5k) - 10 = 0$

soit $1{,}5k - 6{,}25 = 0 \rightarrow k = \dfrac{6{,}25}{1{,}5} = \dfrac{25}{6}$

On obtient donc $I \begin{cases} x = 2\\ y = 4 + 2\times\dfrac{25}{6} = \dfrac{37}{3}\\ z = 0{,}25 + 0{,}5\times\dfrac{25}{6} = \dfrac{7}{3}\end{cases}$

④ On peut vérifier que l'intersection de (AB) et de (PQU) n'est pas à l'intérieur de la plaque PQTU.

Partie B :

① On a $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ (propriété de Chasles)

$\rightarrow \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$= -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD} = -a\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\rightarrow \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} 2-2b \\ -2a+2 \\ -0{,}5a \end{vmatrix}$

② On veut donc $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0$

soit $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 2-2b \\ -2a+2 \\ -0{,}5a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{vmatrix} = (2-2b)\times 0 + (-2a+2)\times 2 + (-0{,}5a)\times 0{,}5$

Donc on veut $-4{,}25a + 4 = 0$ soit $a = \frac{4}{4{,}25} = \frac{16}{17}$

et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} 2-2b \\ -2a+2 \\ -0{,}5a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = (2-2b)\times(-2) + 0 + 0$

Donc on veut $-4 + 4b = 0$ soit $b = 1$

③ La distance sera minimale pour

$\overrightarrow{MN}\left(2 - 2\times 1 ; 2 - 2\times\frac{16}{17} ; -0{,}5\times\frac{16}{17}\right)$

soit $\overrightarrow{MN}\left(0 ; \frac{2}{17} ; -\frac{8}{17}\right)$

$\rightarrow MN = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(-\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \simeq 0{,}485$

Mais une unité correspond à 10 mètres

Donc la distance minimale pour MN sera :

$0{,}485 \times 10\,m = 4{,}85\,m$

Donc la consigne (distance minimale de 4m) est respectée !

Exercice 3

AFFIRMATION 1 :

on peut chercher l'écriture algébrique de $c = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}$

$\rightarrow c = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\rightarrow c = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3}) \neq \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3}) \rightarrow \boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 2 :

on utilise l'écriture exponentielle $c = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}$

$\rightarrow$ on a $c^{3n} = \left(\frac{1}{2}e^{i\pi/3}\right)^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} e^{i\frac{3\pi n}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} e^{i\pi n}$

et suivant la parité de n, on a $e^{i\pi n} = 1$ (si n est pair)

$e^{i\pi n} = -1$ (si n est impair)

Donc c^{3n} sera bien un nombre réel $\rightarrow \boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 3 :

on a $c^2 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (écriture exponentielle)

$\rightarrow c^2 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$ (écriture algébrique)

on a $\frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{i\pi/3}} = 2e^{-i\pi/3}$ (écriture exponentielle)

$\rightarrow \frac{1}{c} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$ (écriture algébrique)

DONC on peut conclure :

- avec les écritures exponentielles, car $\arg c^2 = \frac{2\pi}{3}$ et $\arg\frac{1}{c} = -\frac{\pi}{3}$ $\rightarrow$ les points sont symétriques par rapport à O $\rightarrow$ donc O, S, T sont alignés.
- ou avec les écritures algébriques, en passant en coordonnées $\rightarrow S\left|\begin{matrix}-1/8\\ \sqrt{3}/8\end{matrix}\right.$ et $T\left|\begin{matrix}1\\ -\sqrt{3}\end{matrix}\right.$

On a alors : $\vec{OS}\begin{vmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \end{vmatrix}$ et $\vec{OT}\begin{vmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{vmatrix}$

Donc $\vec{OS}$ et $\vec{OT}$ sont colinéaires ($\vec{OT} = -8\vec{OS}$)

Donc O, S et T sont alignés $\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAI}}$

<u>AFFIRMATION 4</u>

On reconnait une somme de termes d'une suite géométrique.

En effet, on sait que, pour tout n, $|c^n| = |c|^n$

Donc, $|c| + |c^2| + \ldots + |c^n|$

$= |c| + |c|^2 + \ldots + |c|^n$ avec $|c| = \frac{1}{2}$

On obtient donc $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$)

On a donc :

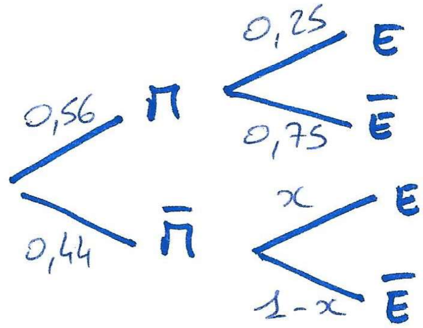
$$S = \frac{1}{2} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\cancel{\frac{1}{2}}}$$

$\rightarrow S = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAI}}$

Exercice 4 :

Partie A :

① 

② on a $p(M \cap E) = p(M) \times p_M(E) = 0,56 \times 0,25 = 0,14$

③ ⓐ Avec la formule des probabilités totales, on a :

$$p(E) = p(E \cap M) + p(E \cap \bar{M})$$
$$= 0,25 \times 0,56 + 0,44 \times x$$
$$\rightarrow p(E) = 0,14 + 0,44x$$

ⓑ on sait que $p(E) = 0,162$

$\rightarrow$ on résout $0,14 + 0,44x = 0,162$

soit $0,44x = 0,022$

soit $x = \dfrac{0,022}{0,44} = 0,05$

④ on cherche $P_{\bar{E}}(M) = \dfrac{P(\bar{E} \cap M)}{P(\bar{E})} = \dfrac{0,56 \times 0,75}{1 - 0,162}$

$$\rightarrow P_{\bar{E}}(M) \simeq 0,50$$

Partie B :

① avec la calculatrice, on obtient

$$p(1 \leq T \leq 2) \simeq 0,683$$

(on aurait pu aussi reconnaitre l'intervalle 1σ)

② il faut adapter la méthode à sa calculatrice, en utilisant InvNorm ou FracNorm.

On obtient $t \simeq 2,25$ soit $P(T \geq 2,25) = 0,066$

$\rightarrow$ il y a une probabilité de 6,6% que le foyer regarde plus de 2h15min sa télévision.

Partie C → pas facile du tout !!

On a $p(1 \leq T \leq 2) = p(T \leq 2) - p(T \leq 1)$

$$= (1 - e^{-\lambda \times 2}) - (1 - e^{-\lambda \times 1})$$

$$= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$$

MAIS on ne connait pas le paramètre λ.

La question est de savoir si $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$ peut être égal à 0,25.

On peut étudier la fonction définie par $f(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$

→ on a $f'(\lambda) = -e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} = e^{-\lambda}(-1 + 2e^{-\lambda})$

La dérivée f' s'annule pour $-1 + 2e^{-\lambda} = 0$

soit $e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$

soit $\lambda = -\ln(0,5)$

On obtient le tableau :

λ	0		$-\ln(0,5)$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
variations de f	$f(0) = 0$	↗	$0,25$	↘	$\lim\limits_{+\infty} f = 0$

$$f(-\ln 0,5) = e^{-(-\ln 0,5)} - e^{-2(-\ln 0,5)}$$

$$= e^{\ln 0,5} - e^{2\ln 0,5}$$

$$= 0,5 - (0,5)^2 = 0,25$$

La seule possibilité pour obtenir 0,25 est donc de prendre $\lambda = -\ln 0,5$. Or, on a $E(T) = \frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\ln 0,5}$

$$\approx 1,44$$

$$\neq 3 \text{ ans}$$

→ $\boxed{\text{FAUX}}$