Corrigé

de l'épreuve de mathématiques

Bac S

Amérique du Nord mai 2019

Correction proposée
par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A : ① ⓐ on cherche $P(1,35 \leq X \leq 1,65)$ avec la calculatrice : $\mu = 1,5$, $\sigma = 0,07$ → $\boxed{0,968}$

ⓑ on a toujours $\mu = 1,5$ et σ_1 inconnu.

or on sait que $P(1,35 \leqslant X_1 \leqslant 1,65) = 0,98$

$$\rightarrow P\left(\frac{1,35-\mu}{\sigma_1} \leqslant \frac{X_1-\mu}{\sigma_1} \leqslant \frac{1,65-\mu}{\sigma_1}\right) = 0,98$$

$$\rightarrow P\left(\frac{-0,15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0,15}{\sigma_1}\right) = 0,98$$

avec Z qui suit la loi centrée réduite → on utilise InvNorm avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$

On obtient $P(-2,326 \leqslant Z \leqslant 2,326) = 0,98$

soit $\frac{0,15}{\sigma_1} = 2,326 \rightarrow \sigma_1 = \frac{0,15}{2,326} \approx \boxed{0,064}$

② ⓐ on a $n = 250$ et $p = 0,02$

→ on vérifie bien les conditions

$n \geqslant 30$; $np = 5 \geqslant 5$; $n(1-p) = 245 \geqslant 5$

On obtient :

$$I_f = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\rightarrow I_f = [0,003 ; 0,037]$$

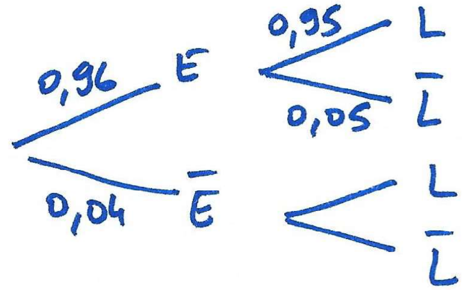
ⓑ Pour la fréquence observée, on a :

$$f_{obs} = \frac{10}{250} = 0,04 \notin I_f$$

Donc on doit réviser la machine !

Partie B

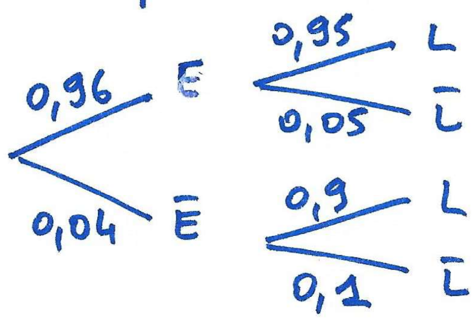
① Avec les données de l'énoncé, on obtient :



Mais on donne aussi $P(\bar{E} \cap L) = 0{,}036$.

On en déduit $P_{\bar{E}}(L) = \dfrac{P(\bar{E} \cap L)}{P(\bar{E})} = \dfrac{0{,}036}{0{,}04} = \boxed{0{,}9}$

L'arbre complété est donc :



② Avec la formule des probabilités totales,

on a $p(L) = p(L \cap E) + p(L \cap \bar{E})$

$= p(E) \times p_E(L) + 0{,}036$

$= 0{,}96 \times 0{,}95 + 0{,}036$

$= \boxed{0{,}948}$

Exercice 2

AFFIRMATION 1 : il y a 2 méthodes possibles

① On résout $z - i = i(z+1) \rightarrow z - iz = 2i \rightarrow z(1-i) = 2i$

on obtient $z = \dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i-2}{2} = i - 1 = -1+i$

En passant à l'écriture exponentielle, on obtient $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

ce qui ne correspond pas à $z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

② on peut aussi partir de la solution $z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$\rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$

On remplace z dans l'équation pour voir si elle est vérifiée.

On veut $z - i = i(z+1)$

$\rightarrow 1 + i - i = i(1+i+1) \rightarrow 1 = -1 + 2i$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

AFFIRMATION 2

On a $1 + e^{i2x} = e^{ix}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right) = e^{ix}(2\cos x)$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{FAUX}}$

En effet, $e^{-ix} + e^{ix}$

$$= \cos(-x) + i\sin(-x) + \cos x + i\sin x$$

$$= \cos x - \cancel{i\sin x} + \cos x + \cancel{i\sin x} = 2\cos x$$

N.B. : un contre exemple aurait donc suffi !!

$\rightarrow$ on remplace x par $\frac{\pi}{4}$

$$\underbrace{1 + e^{2i\frac{\pi}{4}}} \neq \underbrace{2\cos\frac{\pi}{4}\, e^{-i\pi/4}}$$

$1 + e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= \boxed{1+i}$

$2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{1-i}$

AFFIRMATION 3

soit M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $y = -x$

l'affixe de M s'écrira donc $z = x - ix = x(1-i)$

et on calcule séparément $|z-i|$ et $|z+1|$.

On a $|z-i| = |x - ix - i| = |x + i(-1-x)|$

Donc $|z-i| = \sqrt{x^2 + (-1-x)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

et on a $|z+1| = |x - ix + 1| = |x + 1 - ix|$

Donc $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + (-x)^2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{VRAI}}$

AFFIRMATION 4

c'est $\boxed{\text{FAUX}}$ car sinon on aurait l'égalité

$$z^5 + z - i + 1 = 0 \quad \text{avec } z \text{ réel}$$

soit $\underbrace{\underbrace{z^5}_{\text{réel}} + \underbrace{z}_{\text{réel}}}_{\text{réel}} + 1 = \underbrace{i}_{\text{imaginaire pur !}}$

$\rightarrow$ Un nombre réel ne peut pas être égal à un imaginaire pur !

Exercice 3

Partie A : ① ② on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

Donc f' est positive sur $[0;+\infty[$.

On a :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

avec $f(0) = 0 - \ln(0+1) = 0$

On a donc $f(x) \geq 0$

soit $x - \ln(x+1) \geq 0$

soit $\boxed{\ln(x+1) \leq x}$

Partie B :

① $U_1 = U_0 - \ln(1+U_0) = 1 - \ln 2 \approx 0{,}307$

$U_2 = U_1 - \ln(1+U_1) = 1 - \ln 2 - \ln(1+1-\ln 2)$

$= 1 - \ln 2 - \ln(2 - \ln 2)$

$\approx 0{,}039$

② ⓐ Init : $U_0 = 1$ Donc $U_0 \geq 0$ (vrai au rang 0)

Hérédité : on suppose $U_n \geq 0$

D'après la partie A, $f(U_n)$ est positif

soit $U_{n+1} \geq 0$

(la propriété reste vraie au rang $n+1$)

ⓑ on utilise la méthode de base $\rightarrow$ on calcule $U_{n+1} - U_n$

$\rightarrow U_{n+1} - U_n = U_n - \ln(1+U_n) - U_n = -\ln(1+U_n)$

or $U_n \geq 0 \rightarrow \ln(1+U_n) \geq 0$ soit $-\ln(1+U_n) \leq 0$

Donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$ pour tout $n \rightarrow (U_n)$ est $\searrow$

ⓒ La suite (U_n) est décroissante et minorée (par 0)

Donc elle est convergente

③ l va vérifier $l = f(l) \rightarrow l = l - \ln(1+l)$

$\rightarrow \ln(1+l) = 0 \rightarrow \boxed{l = 0}$

④ ⓐ pour l'algorithme, je propose :

Variables : u, n et p sont des nombres

Traitement : Donner une valeur à p

u prend la valeur 1

n prend la valeur 0

Tant que $u > 10^{-p}$

Faire

u prend la valeur $u - \ln(1+u)$

n prend la valeur $n+1$

Fin tant que

Sortie : Afficher n

ⓑ on trouve $n = 5$

→ sur la Ti-83 Premium, le programme est :

```
Prompt P
1 → U
0 → N
While U > 10^(-P)
U - ln(1+U) → U
N + 1 → N
End
Disp N
```

Exercice 4

① Les pyramides LMJKN et LMJKI sont deux pyramides régulières, dont les hauteurs coupent leur base LMJK en son centre noté O.

On a : (NO) $\perp$ (base LMJK)

(IO) $\perp$ (base LMJK)

Donc (NI) $\perp$ (base LMJK).

Or cette base contient (LM) $\rightarrow$ (NI) $\perp$ (LM)

② ⓐ $\overrightarrow{NC} \begin{vmatrix} 1 - 1/2 = 1/2 \\ 1 - 1/2 = 1/2 \\ 0 - 1 = -1 \end{vmatrix}$ $\quad \overrightarrow{ML} \begin{vmatrix} 0 - 1/2 = -1/2 \\ 1/2 - 0 = 1/2 \\ 1/2 - 1/2 = 0 \end{vmatrix}$

ⓑ on calcule $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 0 = 0$

Donc (NC) $\perp$ (ML)

ⓒ On sait donc que (ML) $\perp$ (NI) et (ML) $\perp$ (NC).

Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est un vecteur normal du plan (NCI)

$\rightarrow$ ses coordonnées correspondent à $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ de l'équation cartésienne $\rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 0z + d = 0$

On remplace avec les coordonnées de C pour trouver d

$\rightarrow -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 + d = 0 \rightarrow d = 0$

L'équation cartésienne de (NCI) est donc :

$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$ ou $-x + y = 0$ ou $x - y = 0$

③ ⓐ on vérifie que les coordonnées des points N, J et M vérifient l'équation de (NJM), avec $N\begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{vmatrix}$, $J\begin{vmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{vmatrix}$ et $M\begin{vmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{vmatrix}$.

Par exemple, pour N, on a bien

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1 \text{ !}$$

ⓑ on vérifie que $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (NJM).

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{NJ} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{vmatrix} = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{NM} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{vmatrix} = 1 \times 0 + (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Donc $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{NJ}$ et $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{NM} \rightarrow (DF) \perp (NJM)$

ⓒ La droite d'intersection vérifiera le système :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & \text{pour } (NJM) \\ x - y = 0 & \text{pour } (NCI) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \text{ soit } x = y = k \end{cases}$$ (on pose x égal au paramètre k)

$$\rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 \end{cases}$$

La droite d'intersection passe par le point $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et a comme vecteur directeur $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

→ c'est la droite (EG) (elle passe bien par N)

Exercice de Spé :

① ⓐ • pour $T\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$,

on calcule $MT = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ [5]

cela correspond bien à la lettre U.

• pour $E\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$,

on calcule $ME = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ [5] → lettre O

ⓑ on calcule $PM = \begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 10\\10 & 16\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ [5]

ⓒ on a $AZ = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}$

et $A'Z' = \begin{pmatrix}a'x'+c'y'\\b'x'+d'y'\end{pmatrix}$

or $a \equiv a'$ [5] et $x \equiv x'$ [5]

Donc, par multiplication, $ax \equiv a'x'$ [5]

De même, on aurait $cy \equiv c'y'$ [5]

et, par addition, $ax + cy \equiv a'x' + c'y'$ [5]

De même, on obtiendrait $bx + dy \equiv b'x' + d'y'$ [5]

ⓓ On a $MX \equiv Y$ [5] → $PMX \equiv PY$ [5]

or $PM \equiv I$ [5]

→ $PMX \equiv IX$ [5]

→ $PMX \equiv X$ [5]

Donc $PMX \equiv PY$ [5]
et $PMX \equiv X$ [5]
soit $X \equiv PY$ [5]

ⓔ on a $D \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ [5]

→ on calcule $PD = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ [5]

le décodage de la lettre D nous donne la lettre O.

② ⓐ

on calcule $RS = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [5]

ⓑ on admet $TR \equiv I$ [5]

ⓒ

donc $TRS \equiv IS$ [5]

avec $RS \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [5] soit $TRS \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [5]

et $IS = S$!!

on obtient donc $TRS \equiv S$ [5]

avec $TRS \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [5]

ce qui est absurde car on a

$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [5].