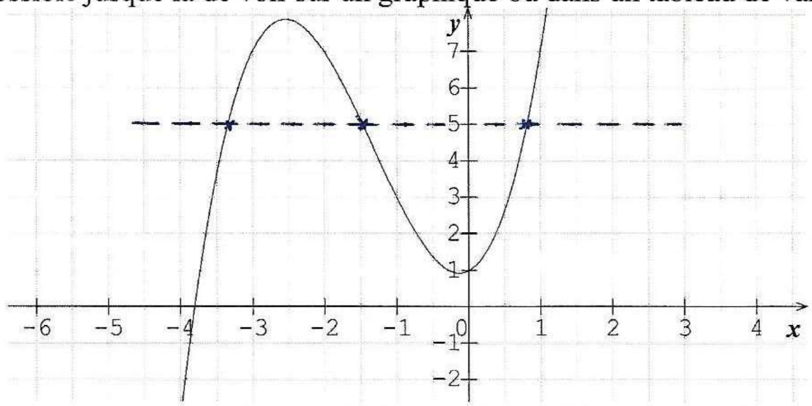
Le théorème des valeurs intermédiaires (ou TVI)

Il va nous permettre, en Terminale, de *formaliser* à l'aide d'un *théorème* (et d'une *rédaction type*) un résultat qu'il était possible jusque là de voir sur un graphique ou dans un tableau de variations.



Sur le graphique ci-dessus, on pourrait dire que la fonction "passe" trois fois par le nombre 5 sur l'intervalle [- 4 ; 3], c'est à dire que le nombre 5 possède trois antécédents sur l'intervalle [- 4 ; 3], c'est à dire que l'équation $f(x) = 5$ possède trois solutions sur l'intervalle [- 4 ; 3].

Le *théorème des valeurs intermédiaires* va maintenant nous permettre de démontrer un tel résultat.
Pour une fonction f donnée, on pourra montrer, par exemple, que le nombre 5 possède au moins un antécédent par la fonction , c'est à dire que l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans un intervalle.

Exemple et rédaction type

On considère une fonction f définie sur [- 4 ; 3] par $f(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$
On va montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans l'intervalle [- 4 ; 3]

*C'est un énoncé type pour lequel on **doit reconnaitre** en Terminale l'utilisation du TVI.*

La fonction f est continue sur l'intervalle $[-4 ; 3]$

On a : $f(-4) = -3$

$f(3) = 67$

→ le nombre 5 appartient bien à l'intervalle image $[-3 ; 67]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[-4 ; 3]$.

Remarque

Ce théorème ne nécessite pas ici d'avoir les variations de la fonction. Cela dit, il ne nous permet que de savoir qu'il y a *au moins* une solution. Pour obtenir le *nombre exact de solutions*, il nous faudra connaitre les variations et appliquer le corollaire du TVI (à voir sur les fiches suivntes !).

Comment montrer l'unicité d'une solution
Le corollaire du TVI

Le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires* va, cette fois, nous permettre de démontrer qu'une fonction "passe" exactement ***une fois*** (***et une seule***) par une valeur réelle donnée (sur un intervalle donné), c'est à dire que l'antécédent par la fonction sera *unique*, c'est à dire que l'équation donnée possède une *unique solution* !

Exemple et rédaction type

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	2	α	15
$f(x)$	-4	0	10

On va montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une ***solution unique*** dans l'intervalle $[2 ; 15]$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 15]$.

On a : $f(2) = -4$

$f(15) = 10$

→ le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[-4 ; 10]$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2 ; 15]$.

Remarque

On note souvent cette solution à l'aide de la lettre α et on peut la placer dans le tableau de variations.
Et on peut alors en déduire le signe de la fonction f :

- la fonction f est négative sur l'intervalle $[2 ; \alpha]$
- la fonction f est positive sur l'intervalle $[\alpha ; 15]$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
Application

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	2		10		12		15
$f(x)$	7	$\nearrow$	9	$\searrow$	2	$\nearrow$	8

Montrons que l'équation $f(x) = 6$ possède ***exactement deux solutions*** dans l'intervalle $[2 ; 15]$.

On doit forcément travailler ici sur des intervalles séparés. On va montrer qu'il n'y a ***aucune solution*** *sur [2 ; 10], puis une* ***unique solution*** *sur [10 ; 12], puis une* ***unique solution*** *sur [12 ; 15].*

sur l'intervalle [2 ; 10] :

Sur cet intervalle, le minimum de la fonction est 7. L'équation $f(x) = 6$ n'a pas de solution ici.

sur l'intervalle [10 ; 12] :

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[10 ; 12]$

On a : $f(10) = 9$ et $f(12) = 2$

$\rightarrow$ le nombre 6 appartient bien à l'intervalle image $[2 ; 9]$.

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 6$ possède une solution unique dans $[10 ; 12]$.

sur l'intervalle [12 ; 15] :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[12 ; 15]$

On a : $f(12) = 2$ et $f(15) = 8$

$\rightarrow$ le nombre 6 appartient bien à l'intervalle image $[2 ; 8]$.

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 6$ possède une solution unique dans $[12 ; 15]$.

BILAN : il y a donc bien deux solutions sur l'intervalle [2 ; 15].

Comment appliquer le théorème des valeurs intermédiaires avec une limite infinie

Le *théorème des valeurs intermédiaires* pourra également être appliqué dans le cas d'une *limite en l'infini* (si on a x qui tend vers l'infini) ou dans le cas d'une *limite infinie* (si c'est la fonction f qui tend vers l'infini).
La rédaction peut alors paraitre plus compliquée mais, pour autant, c'est exactement le même raisonnement que dans le cas de nombres réels.

Exemple et rédaction type

On considère une fonction f dont on connait le tableau de variations.

x	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 7

On va montrer que l'équation $f(x) = 5$ possède exactement une solution dans l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 7$

→ le nombre 5 appartient bien à l'intervalle image $]-\infty ; 7]$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ possède une solution unique dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

Recherche de solutions avec la calculatrice

Une exemple d'une recherche de solution avec la calculatrice

Il faudra faire ce travail de recherche au moins une fois, bien sérieusement, tout seul ou avec un professeur, et cela devrait être bien intégré pour la suite de l'année !

On va prendre, comme exemple, l'utilisation de la ***Ti 83 Premium*** . Si vous avez une calculatrice différente, il faudra adapter et mémoriser ce travail avec les "*touches de votre calculatrice*" .

On considère la fonction f ***définie par*** $f(x) = \ln x - 4 + \frac{x}{2}$ ***sur*** $]0 ; +\infty[$ ***.***

Par application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on montre que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Etape 1 : on affiche la fonction avec la touche "***f (x)***".
On utilise "**def table**" pour effectuer les réglages du tableau de valeurs.
On commence avec "**DebutTbl**" égal à 0 (car on cherche une solution en partant de 0 , dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$) et un "**ΔTbl**" égal à 1 (c'est le "pas" pour les valeurs de x).
On obtient avec la touche "**table**" le tableau suivant :

X	Y1
3	-1,401
4	-0,614
5	0,1094
6	0,7918

Etape 2 : d'après le tableau précédent, la solution de l'équation $f(x) = 0$ se trouve donc entre 4 et 5.
On poursuit avec "**DebutTbl**" égal à 4 et un "**ΔTbl**" égal à 0,1. On obtient :

X	Y1
4,7	-0,102
4,8	-0,031
4,9	0,039
5	0,1094

Etape 3 : d'après le tableau précédent, la solution de l'équation $f(x) = 0$ se trouve donc entre 4,8 et 4,9.
On poursuit avec "**DebutTbl**" égal à 4,8 et un "**ΔTbl**" égal à 0,01. On obtient :

X	Y1
4,83	-0,01
4,84	-0,003
4,85	0,004
4,86	0,0110

Conclusion : on obtient donc un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$, à 0,01 près.
Cette solution sera comprise entre 4,84 et 4,85.