Comment résoudre des équations avec z et $\overline{z}$

Résolution pour les équations en z et $\overline{z}$

La particularité de ce type d'équation sera qu'il est impossible en même temps z et $\overline{z}$.
La méthode consiste alors à remplacer le nombre z par sa forme algébrique $a + \mathrm{i}\, b$ et le nombre $\overline{z}$ par sa forme algébrique $a - \mathrm{i}\, b$.
On regroupe alors séparément la partie réelle et la partie imaginaire.
On obtient alors un système de 2 équations à 2 inconnues (qui sont alors bien réelles), que l'on résout pour trouver a et b.

Exemple : on veut résoudre l'équation $2z - 5i = i\overline{z} + 2$

On remplace z par $a+ib$ et $\overline{z}$ par $a-ib$.

On obtient : $2(a+ib) - 5i = i(a-ib) + 2$

$\rightarrow 2a + 2ib - 5i = ia - \boxed{i^2} b + 2$ avec $i^2 = -1$

$\rightarrow 2a - b - 2 + i(2b - 5 - a) = 0$

or, un nombre complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a - b - 2 = 0 \\ 2b - 5 - a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ -a + 2b = 5 \end{cases}$$

$(\times 2)$ avec la méthode par combinaison

$$\rightarrow \boxed{+} \begin{cases} 2a - b = 2 \\ -2a + 4b = 10 \end{cases}$$

$$3b = 12 \rightarrow b = 4$$

En remplaçant, on obtient $2a - 4 = 2$

soit $a = 3$.

Le système a donc pour solutions le couple $(3 ; 4)$.

$\rightarrow$ L'équation initiale a donc pour solution le nombre complexe $z = 3 + 4i$.